LYCEE PILOTE SFAX	SERIE D'EXERCICES EXPONENTIELLE	Mr MEGDICH
		4ème MATH

EXERCICE N°1

A)1) Montrer que pour tout réel x ; $e^x - x \geq 1$ et déduire que pour tout réel x ; $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$

2) On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

a) *Montrer que pour tout x de* $[0,+\infty[$ et que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a

$0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x) \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$

b) *En déduire* que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $0 \leq \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$

Dans la suite on prend $f(x)=\frac{1}{1-xe^{-x}}$ *pour* tout réel x

B) dans cette partie, on se propose de trouver une valeur approché de $I = \int_0^1 f(x)dx$

On pose $I_0 = 1$; pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}dx$ et pour tout n de $\mathbb{N}$; $S_n = \sum_{k=0}^{N} I_k$

1) Calculer I_1 *et* I_2

2) a)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, *on* a: $1+xe^{-x}+x^2e^{-2x}+........+x^ne^{-nx} = \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}$

b) En déduire que n de $\mathbb{N}$,on a: $I-S_n = \int_0^1 f(x)x^{n+1}e^{-(n+1)x}dx$

3) Montrer que (S_n) converge vers une limite que l'on précisera ; Donner une valeur approché de I à 10^{-1} prés

EXERCICE N°2(BAC2008)

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de f_n puis montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans une unique solution $u_n \in]0,1[$

On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$ une suite u_n

2)a)Soit n un entier naturel non nul et x un réel de $]0,1[$.

Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ *et* $f_n(x)$

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $f_n(u_{n+1}) \prec 0$.

c)Montrer que la suite (Un) est croissante et qu'elle converge

4) Monter que pour tout n ≥ 1, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$. Calculer alors la limite de la suite U

Exercice 3

A/ Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que f est continue à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM

2. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

B/ Soit F la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par. $F(x)=\int_x^e \frac{1}{t^2\ln(t)}dt$

1. Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
2. a. Montrer que pour tout réel t de $[1,+\infty[$, $\ln(t)\le t-1$.

   b. Montrer que pour tout $x\in]1,e[$, $F(x)\ge \frac{1}{e^2}\int_x^e \frac{1}{t-1}dt$.

   c.. Déterminer alors la limite de F à droite en 1.
3. a. Montrer que pour tout $x\in]e,+\infty[$, $F(x)\ge \frac{-1}{e}$.

   b. En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L et que $\frac{-1}{e}\le L\le 0$.
4. Tracer une allure de la courbe de F dans un repère $(O',\vec{u},\vec{v})$. (On prendra $L\simeq -0{,}15$)

Exercice 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{x}{n}-e^{-nx}$.

1. Dresser le tableau de variation de f_n.
2. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une seule solution a_n.
3. Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$, $e^x\ge x+1$. Montrer que $\frac{1}{n}<a_n<1$.
5. a. Montrer que $f_{n+1}(a_n)=\frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[n\left(e^{a_n}-1\right)-1\right]$. b. En déduire que $f_{n+1}(a_n)>0$.

   c. Montrer alors que la suite (a_n) est décroissante et par suite qu'elle est convergente.
6. a. Vérifier que $a_n=\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(a_n)}{n}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

EXERCICE5

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2$ cm.

① Dresser le tableau de variation de f.

② Montrer que la droite Δ d'équation $y=-x$ est une asymptote oblique à C_f.

③ Tracer C_f.

B/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

On désigne par C_F la courbe représentative de F dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math