Mr : Chahed **Série Exponentielle** **4eme math**

Exercice 1 : Donner la bonne réponse pour chacune des questions suivantes :

1°/ Le réel $x = e^{-2\ln\frac{1}{2}}$ est égale à :

-4 ; b) $\frac{1}{4}$; c) 4 .

2°/ La valeur moyenne de la fonction : $x \to xe^{x^2}$ sur $[0, \sqrt{2}]$ est :

$\frac{e^2-1}{2}$; b) $\frac{e^2-1}{2\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{2}(e^2-1)$.

3°/ La limite quand $x \to +\infty$ de la fonction $x \to e^{2x} - x^2e^x$ est :

$+\infty$; b) 0 ; c) $-\infty$.

4°/ La fonction $x \to x - \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{2}{1+e^x}$; b) $f(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x}$; c) $(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

5°/ La limite quand $x \to +\infty$ de la fonction $x \to \frac{1-2^x}{1+2^x}$ est :

0 ; b) -1 ; c) $-\frac{1}{2}$.

6°/ Soit $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ alors la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f'(x) = \ln 2\left(\sqrt{2}\right)^x$; b) $f'(x) = \frac{\ln 2}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x$; c) $f'(x) = -\sqrt{2}\ln 2\left(\sqrt{2}\right)^x$

Exercice 2 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1°/ L'équation $2^{x^2-x} = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions .

2°/ Pour tout réel x on a : $3^x \geq 2^x$.

3°/ La droite d'équation : $y = x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe C_f de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

4°/ La fonction $x \to e^{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$.

5°/ $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

6°/ $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-t})\,dt$ alors $F'\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 2ln2$.

Exercice 3:

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

C_f désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1°/ a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

2°/ a) Montrer que f est impaire .

b) Ecrire une équation de la tangente Δ à C_f au point O .

Etudier la position de C_f par rapport à Δ .

3°/ Tracer Δ , C_f et $C_{f^{-1}}$.

4°/ Calculer l'aire A de la région du plan limité par C_f et les droites d'équations :

$x = -1$ et $y = 0$.

II. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)\,dt$.

1°/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $F'(x) = \frac{x-1}{x(x+1)}$.

2°/ a) Calculer (1) , déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $F(x) = \int_1^x \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt$.

b) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Retrouver A .

c) Dresser le tableau de variation de F .

Exercice 4:

Partie A

Soit pour tout $x \in]-1,+\infty[$: $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$ et $g(x)=\frac{e^x}{(1+x)^2}$. On désigne par (C) et (C′) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ Etudier les variations de f et de g et vérifier que pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$g(x)=f(x)-f'(x)$$

2°/ a) Etudier les positions relatives de (C) et (C′).

b) Tracer (C) et (C′).

3°/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C) et (C′) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Partie B

On considère $J=\int_0^1 f(t)\,dt$

1°/ Montrer que $1 \leq J \leq \frac{e}{2}$.

2°/ soit (U_n) la suite définie par $U_0=\int_0^1 e^t\,dt$ et $\forall\, n \in IN^*$, $U_n=(-1)^n\int_0^1 t^n e^t\,dt$.

a) Calculer U_0 et U_1.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall\, n \in IN$, $U_{n+1}=(-1)^{n+1}e+(n+1)U_n$.

3°/ Dans cette partie, on suppose que $n \in IN^*$.

On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} U_k$ et $R_n=(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt$

a) Vérifier que $\forall\, t \in [0,1]$, $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots\cdots+(-1)^n t^n+\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$.

b) En déduire que $J=S_n+R_n$.

c) Montrer que $|R_n| \leq \frac{e}{2(n+2)}$.

d) En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 5:

Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2e^x-1}}$.

1°/ a) Montrer que le domaine de définition de f est $I=]-\ln(2)\,;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $f'(x)=-\frac{e^x}{\left(\sqrt{2e^x-1}\right)^3}$. Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

2°/ a) Montrer que f est une bijection de I sur $]0\,;+\infty[$, on note $g=f^{-1}$ Expliciter g(x) pour >0 .

c) Tracer la courbe C_g dans le même repère.

3°/En étudiant la fonction $\varphi : x \to f(x)-x$ sur I, montrer que l'équation $f(x)=x$

Admet un unique solution. Vérifier que $0<\alpha<1$.

4°/ Soit u la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $u(x)=-\ln(2\cos^2(x))$.

Dresser le tableau de variation de . Résoudre l'équation $(x)=\ln(2)$.

5°/ Soit F la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\int_0^{u(x)} f(t)\,dt$.

Montrer que F est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

Soit D le domaine limité par C_f , l'axe des abscisses et les droite d'équations $x=0$ et $x=\ln(2)$

Exercice 6 :

I/ Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$ 1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1 + x)$

Etudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = e^{-x}h(e^{x})$Puis dresser le tableau de variation de f

b) Construire C_f on précisera la tangente au point d'abscisse 0

4) a) Vérifier que $\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

b) Calculer l'aire de la partie limiter par C_f, $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

II/ Soit (U_n) la suite définie sur N par :

$U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{e^{-k}}{k+1}$ et $R_n = (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$

a) Montrer que $\forall t > 0$ on a : $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}t^{k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$

b) En déduire que $\forall x > 0$ on a : $\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^{x}\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$

Puis que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\ln(1 + e^{x}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{e^{x(k+1)}}{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^{e^{x}}\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$

a) Montrer alors que : $f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{e^{kx}}{k+1} + (-1)^{n+1}e^{-x}\int_0^{e^{x}}\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$

b) Montrer que : $U_n + e\,R_n = e\ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$

3) Montrer que $|R_n| \le \frac{1}{(n+2)e^{n+2}}$, puis déterminer la limite de R_n

b) Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e\ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$

Exercice 7 : Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par : $g(x) = \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^{2}}$

1) Dresser le tableau de variation de g

2) Construire C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3) Soit $G(x) = \int_1^{e^{x}} g(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$

a) Montrer que G est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a : $G'(x) = \frac{xe^{x}}{(1+x)^{2}}$ En déduire que : $G(x) = \int_0^{x}\frac{te^{t}}{(1+t)^{2}}dt$

c) A l'aide d'une intégration par partie montrer que : $G(x) = e^{x} - 1 - \frac{xe^{x}}{1+x}$

4) Calculer l'aire de la partie limiter par C_g, $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$

Exercice 8

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 1)e^{x} + 1$

Dresser le tableau de variation de g et déduire le signe de $g(x)$

2/ Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Pour tout $x \in]0,1[$ et Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère les fonctions

$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^{x}(x - t)^{n}e^{t}dt$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}$

a) Montrer que $0 \le I_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x}$ b) En déduire $\lim \frac{I_n(x)}{x^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$

3/ a) Montrer que $I_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}(x)$

b) Montrer par récurrence que $I_n(x) + S_n(x) = e^x$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$

4/ a) Montrer que Pour tout $x \in]0,1[$ on a $\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{I_2(x)}{x^2} + \frac{1}{2}$ puis déduire que f est dérivable en 0

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

1.a. Etudier f est tracer (C)

b. Soit $\alpha \in]-1+\infty[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire par unité d'aire de la partie du plan limité par (C) et les droites $y = 0$, $x = -1$ et $= \alpha$.

Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ puis dterminer sa limite lorsque α tend vers $+\infty$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $I = [-1+\infty[$ par $f_n(x) = (x+1)^n e^{-x}$

a. Dresser le tableau de variation de f_n

b. En déduire que pour tout $x \in I$ on a $0 \le f_n(x) \le n^n e^{1-n}$ .Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n e^{1-n}$

3.Soit g_n la fonction définie sur $J =]-1+\infty[$ par $g_n(x) = \frac{1}{f_n(x)}$

Montrer que pour tout $x \in J$ on a $g'_n(x) = g_n(x) - ng_{n+1}(x)$

4. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $I_n = \int_0^1 g_n(x)dx$

a. Montrer que (I_n) est décroissante minorée

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on a $\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le I_n \le \frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

Puis déduire la limite de I_n

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n = nI_{n+1} - 1 + \frac{e}{2^n}$ .5d.Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 10 :

I. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ 1. Etudier f et tracer C

2. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n{}^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n} \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout réel x, on a $e^x \ge x+1$

b. En déduire que pour tout réel x strictement positif, on a $x^2 f(x) \le \frac{x}{x+1}$

c. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n \le \frac{1}{n+1}$

d. Montrer que (U_n) est convergente et donner sa limite.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \sum_{K=0}^{n-1} u_K$

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$ puis déduire sa limite

II. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)dt \quad x > 0 \\ F(0) = 2\ln(2) \end{cases}$$

1. a Vérifier que pour tout réel x strictement positif, on a $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{dt}{t} = 2\ln(2)$

b En utilisant l'inégalité de la question 2.a, montrer que pour tout réel t strictement positif, on a $\quad -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$

2. a Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a :$-3x^2 \leq F(x) - 2\ln(2) \leq 0$

b En déduire que F est dérivable à droite de zéro.

3. a Montrer que pour tout réel $t \geq 1$, on a $f(t) \leq e^{-t}$ puis déduire $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$

4. a Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis donner l'expression de $F'(x)$

b Dresser le tableau de variations de F et tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et et c_f sa courbe représentative

1) Dresser le tableau de variation de f

2) a. Montrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera

b. Expliciter $f^{-1}(x)$ et tracer c_f et $c_{f^{-1}}$

3) Soit $\lambda > 0$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée parc_f et les droites d'équations respectives $x = 0, x = \lambda$ et $y = 1$ .Montrer que $A(\lambda) = \ln(2) - \ln\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$ puis déduire $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

4) Soit $x > 0$ et $n \in \mathrm{N}^*$ on pose $F_0(x) = x$ et $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n \mathrm{dt}$

a. Expliciter $F_1(x)$

b. Montrer que $0 \leq F_n(x) \leq x[f(n)]^n$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$

c. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 1 - [f(x)]^2$

d. Montrer alors que pour tout $k \in \mathrm{N}$ on a $F_{k+2}(x) = F_k(x) - \frac{1}{k+1}[f(x)]^{k+1}$

e. Montrer que pour tout $n \in \mathrm{N}^*$ on a $F_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}[f(x)]^{2k-1}$

5) Soit $n \in \mathrm{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}$ calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b. Vérifier que $f(-x) - f(x) = x$ et déduire que la droite $\Delta: y = -x$ est une asymptote a $\mathcal{C}$

c. Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathcal{C}$

d. Montrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J et expliciter $f^{-1}(x)$

2) Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

a. Montrer que g est dérivable sur R et calculer $g'(x)$

b. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{R}$ on a $g(-x) = -\frac{x^2}{2} - g(x)$

3) Soit F la fonction définie sur R par $F(x) = \frac{g(x)}{x}$ $\quad si\ x \neq 0$ et $F(0) = \ln(2)$ et Γsa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$

a. Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $\ln(1 + t) \leq t$

b. En déduire que pour tout $x > 0$ on a $0 \leq F(x) \leq \frac{1 - e^{-x}}{x}$, déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

c. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{R}^*$ on a $F(-x) = \frac{x}{2} + F(x)$

d. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ et montrer que la droite $\Delta': y = -\frac{x}{2}$ est une asymptote a Γ

4) a. A l'aide d'une intégration par ... on a

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \int_0^t (t-a)f''(a)da$$

b. Montrer que pour tout $x \in$ R on a $0 \leq f''(x) \leq 1$

c. En déduire que pour tout $x > 0$ on a $0 \leq F(x) - Ln(2) + \frac{x}{4} \leq \frac{1}{6}x^2$

d. En utilisant 3)c) montrer que l'inégalité présidente reste vraie pour $x < 0$

e. Montrer alors F est dérivable en 0 et calculer $F'(0)$

5) a. Montrer que F est dérivable sur R*et que pour tout $x \in$ R* on a $xF'(x) = f(x) - F(x)$

b. Montrer que F pour tout $x \in$ R* on a $g(x) = xf(x) + \int_0^x \frac{te^{-t}}{1+e^{-t}}$dt

c. Montrer que pour tout $x \in$ R on a $\int_0^x \frac{te^{-t}}{1+e^{-t}}$dt ≥ 0

e. Dresser le tableau de variation de F et tracer Γ en précisera la tangente au point d'abscisse 0

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et C sa courbe représentative

1. a. Montrer que f est dérivable a droite en 0
   b. Dresser le tableau de variation de f
   c. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $f''(x) = \frac{(1-3x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^5}$
   d. On déduire que C présente un point d'inflexion et tracer C

2.Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $]0,+\infty[$ $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

a. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a

$$\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = \frac{1}{e} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

c. En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$

d. calculer l'aire de la partie du plan limiter par C et les droites d'équation respective $x = 0$, $x = 1$ $et\ y = 0$

3. a. Soit n un entier naturel non nul .Montrer que l'équation $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$ admet une unique solution a_n

b. Vérifier que $-\frac{1}{a_n} + ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$

4. a. Montrer que pour tout $t \in [0,+\infty[$ on a $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$

b. En déduire que $x \in [0,+\infty[$ on a $-\frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal a 4

a. Vérifier que $a_4 \geq 1$ puis déduire que $a_n \geq 1$

b. Montrer que $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n{}^2}{n} \leq 1$ puis que $a_n \geq \sqrt{\frac{n}{6}}$. En déduire la limite de a_n