Exercice 1.

1) Soit g la fonction définie sur R par $g(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et Cg sa courbe.
   a) Dresser le tableau de variations de g et en déduire qu'elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J. Expliciter g^{-1}
   b) Etudier la position relative de Cg et de sa tangente T au point d'abscisse 0. Interpréter le résultat obtenu. Construire Cg et $C_{g^{-1}}$
2) Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=\sqrt{g(x)}$
   a) Dresser le tableau de variation de f
   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\ln 2,1\right[$
3) Soit la suite (u_n) définie sur N par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le u_n<\alpha$
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   c) Soit la suite (v_n) définie sur N par la valeur moyenne de f sur $[u_n,\alpha]$ Montrer $u_{n+1}\le v_n<\alpha$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
4) Soit h la fonction définie sur $\left]0,1\right[$ F par $h(x)=g^{-1}(x^2)$.

   Soit φ la fonction définie sur R par $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$

   Soit F la fonction définie par $\begin{cases} F(0)=-\ln\left(1+\sqrt{2}\right) & \text{si } x=0 \\ F(x)=\varphi o h(x) & \text{si } x\in\left]0,1\right[\end{cases}$
   a) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,1\right[$ et déterminer sa fonction dérivée
   b) Expliciter F pour tout $x\in\left]0,1\right[$.
   c) Etudier les variations de F à droite en 0 et tracer sa courbe.
5) Exprimer v_n en fonction de u_n et α

Exercice 2

1) Soit la fonction g définie sur R par $\begin{cases} g(x)=x-1+e^{\frac{1}{x-1}} & si\ x<1 \\ g(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2} & si\ x\ge 1 \end{cases}$
   a) Montrer que g est dérivable sur R et déterminer sa fonction dérivée.
   b) Montrer que $\forall x\le 0$, $x^2e^x<1$. En déduire que $\forall x\in\left]-\infty,1\right[$, $g'(x)>0$
   c) Dresser le tableau de variations de g et construire sa courbe Cg
   d) Soit $\lambda\ge 1$. Déterminer l'aire A(λ) du plan de la partie limitée par Cg, les droites d'équations x = 1, x = λ et y = 0. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty} A(\lambda)$

2) $\forall n \in N^*$, on définit la fonction f_n sur $[1,+\infty[$ $[1,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln(x))^n}{x^2}$$

Dresser le tableau de variations f_n.

3) On note (u_n) la suite définie par l'extremum de f_n.

a) Calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$. En déduire que $u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$

b) Montrer alors que $u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$

c) Montrer par récurrence que $U_n \le \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. En déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

4) $\forall x \in [1,+\infty[$, on pose $\varphi_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln x)^k}{k!}\right)$ et $h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln x)^k}{k!}$

a) Déterminer $\varphi'_n(x)$. En déduire que $\forall\ x \ge 1$, $\varphi_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$

b) Montrer que $0 \le \phi_n(x) \le (x-1)\ u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$

c) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $\varphi_n(x)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x)$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$

Exercice 3

Soit $n \in N^*$ et f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$

A) On désigne par C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier les variations de f_n. Exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$
2) Montrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe que l'on précisera.
3) Etudier la position relative de C_1 et C_2. Tracer C_1 et C_2.
4) Dans toute la suite, on prendra $n \ge 2$.
   a) Montrer que $f_n(2) < 2$
   b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]1,2[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 2$
5) On définie ainsi la suite (α_n) pour tout $n \ge 2$
   a) Trouver une relation entre $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$
   b) En déduire que $f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1}$
   c) Montrer alors que la suite (α_n) est décroissante
6) Montrer que $\alpha_n = e^{\frac{\alpha_n - \ln 2}{n}}$
7) Montrer que $1 \le \alpha_n \le e^{\frac{2}{n}}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$
8) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_1, C_2 et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha_2$. Montrer que $A = 2\alpha_2 - e$

B) Soit F_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $F_n(x)=\int_1^x f_n(t)dt$. $n\in N^*$

1) Montre que F_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner son sens de variations

2) Dans cette question, $x\in[1,+\infty[$ et $n\in N^*$

a) Montrer que pour tout $t\in[1,x]$, $\frac{e^t}{x^n}\le f_n(t)\le e^t$

b) En déduire que : $\frac{e^x-e}{x^n}\le F_n(x)\le e^x-e$

c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{F_n(x)}{x}\right)$

3) Soit $x\in]0,1]$ et $n\in N^*$

a) Montrer que pour tout $t\in[x,1]$, $\frac{1}{t}\le f_n(t)$

b) En déduire que pour tout $x\in]0,1]$, $F_n(x)\le\ln x$

c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to0^+}F_n(x)$

4) Montrer que F_n admet une fonction réciproque F_n^{-1}.

5) Montrer que F_n^{-1} est dérivable sur R et déterminer $\left(F_n^{-1}\right)'(0)$.

6) Soit $n\ge2$ et (u_n) la suite définie par $u_n=F_n(\ln 3)$.

a) Montrer que $0\le u_n\le\frac{3}{n-1}\left(1-\frac{1}{(\ln 3)^{n-1}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

b) Montrer que $u_n-nu_{n+1}=\frac{3}{(\ln 3)^n}-e$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_{n+1}$

Exercice 4.

A) Soient les suites (v_n) et (w_n) définies par : $v_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ et $w_n=\frac{n^n}{n!}$. $n\in N^*$

1) Vérifier que $\ln w_n=-n\ln v_n$ et que $w_{n+1}=w_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) Soit f la fonction définie pour tout réel x ≥1 par $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

a) Dresser le tableau de variations de f et en déduire que $\forall$ x $\ge$ 1, $f(x)\ge\ln 2$

b) Montrer que : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge$ 2. En déduire que $\forall n\ge6$: $w_n\ge2^n$ et que $v_n\le\frac{1}{2}$

3) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n=\ln w_{n+1}-\ln w_n$

4) Montrer que $\forall x\ge0$: $0\le x-\ln(1+x)\le\frac{x^2}{2}$. En déduire que $0\le1-u_n\le\frac{1}{2n}$

5) Etablir que $\forall\in[0,1[$: $x\le-\ln(1-x)$. En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)\le1+\ln n$

6) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln w_n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{e}$

B) Pour tout x $\ge$ 0, $\forall p\in N$, on considère la fonction : $\varphi_p(x)=\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$

1) Pour tout x $\geq$ 0, on pose $I_0(x)=\int_0^x e^{-t}dt$ et $\forall p\in N^*,\ I_p(x)=\int_0^x e^{-t}\dfrac{(x-t)^p}{p!}dt$

a) Montrer que $I_{p+1}(x)=\dfrac{x^{p+1}}{(p+1)!}-I_p(x)$ et $\varphi_{p+1}(x)=\varphi_p(x)+(-1)^{p+1}\dfrac{x^{p+1}}{(p+1)!}$

b) Montrer que $\varphi_p(x)+(-1)^{p+1}I_p(x)=e^{-x}$.

c) En déduire que $\forall n\in N:\varphi_{2n+1}(x)\leq e^{-x}\leq\varphi_{2n}(x)$

2) a) Montrer que $\varphi'_{p+1}(x)=-\varphi_p(x)$.

b) En déduire que $\forall n\in N^*,\varphi_{2n-1}(x)=0$ admet une solution unique x_n.

c) Dresser alors le tableau de variation de φ_{2n-1} et φ_{2n}

3) a) Montrer que pour tout $n\in N^*$, $\varphi_{2n}(x_n)=\dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}$

b) Montrer que $\varphi_{2n+1}(x_n)=\dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1-\dfrac{x_n}{2n+1}\right)$ et que $\dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}\leq 1$.

c) Montrer que $\dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}\leq 1$. En déduire que pour tout $n\in N^*:x_n\leq n$.

d) Montrer que $\varphi_{2n+1}(x_n)>0$. En déduire que la suite (x_n) est croissante

4) Montrer que pour tout $n\in N^*$: $1\leq\dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}e^{x_n}\leq 2$

5) On pose $y_n=\dfrac{x_n}{2n}$. Montrer que $v_{2n}\leq y_n e^{y_n}\leq 2^{\frac{1}{2n}}v_{2n}$

6) En déduire que la suite (z_n) définie par $z_n=y_ne^{y_n}$ converge vers $\dfrac{1}{e}$

7) Montrer que l'équation $xe^x=1$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α

8) En déduire que la suite y_n converge vers α

Exercice 5.

Le plan étant muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

I/ Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\int_0^x\dfrac{t^2}{1-t^2}dt$

1) a) Justifier l'existence de f

b) Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que pour tout réel $t\neq -1$ et 1

$$\frac{t^2}{1-t^2}=\alpha+\frac{\beta}{1-t}+\frac{\gamma}{1+t}$$

c) En déduire que pour tout réel $x\in]-1,1[$ $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-x$

2) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) a) Montrer que pour tout réel $x\in]0,+\infty[$ et $k\in N^*$, $\ln x\leq\dfrac{x}{k}-1+\ln k$

b) En déduire que pour tout entier naturel k $\in \mathbb{N}^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k$

c) Montrer alors que $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln n!$

d) Montrer que pour tout entier $n \in N^*$, $\ln n! \geq \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-n+\frac{1}{2}\ln 2$

4) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n$

a) Montrer que pour tout entier $n \in N^*$, $u_n \geq \frac{1}{2}\ln 2$.

b) Vérifier que pour tout entier $n \in N^*$, $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

II/ Soit la suite (v_n) définie sur N par : $v_0 = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}$ et $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} dx$

1) Calculer v_0

2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y^2 - x(1-x) = 0$

b) En déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3) a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante

b) En déduire qu'elle est convergente

4) a) Montrer que pour tout entier $n \in N$, $v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5} v_n$

b) En déduire que : $\frac{n+2}{n+5} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = 1$

5) a) Montrer, par récurrence, que : $v_v v_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

b) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{\frac{3}{2}} v_n\right) = \sqrt{2\pi}$.

6) Montrer que pour tout entier p $\in \mathbb{N}^*$, $v_{2p} = \frac{2}{(2p+1)(2p+3)} \cdot \frac{(2^p.p!)^2}{(2p)!}$

III/ (u_n) étant la suite définie dans I/ 4)

1) Montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $e^{u_n} = \left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)e^n$.

2) Exprimer $e^{2u_p - u_{2p}}$ en fonction de p et v_{2p}. $(p \in N^*)$

3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln\sqrt{2\pi}$

Exercice 6.

Soit f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=x^n e^{-x}$ (n étant un entier naturel non nul). Soit C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé. Unité ; 3cm.

A) 1) Pour $n \geq 2$, étudier les variations de f_n

2) Etudier les variations de f_1 et construire C_1 et C_3.

3) Soit S_n la symétrie axiale d'axe la droite $x=n$ et C'_n l'image de C_n par S_n

a) M(x,y) est un point du plan, déterminer les coordonnées de M'= S_n (M).

b) Montrer que $C_n^{'}$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases} x \leq 2n \\ y = f_n(2n-x) \end{cases}$. En déduire la construction de $C_3^{'}$

c) Pour $x \leq 2n$, on pose $g_n(x)=f_n(2n-x)$. Interpréter géométriquement les intégrales $\int_n^{2n} f_n(t)dt$ et $\int_0^n g_n(t)dt$. En déduire que $\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n g_n(t)dt$.

4) pour $x \in]0,n[$, on pose $h_n(x)=\ln\left(g_n(x)\right)-\ln\left(f_n(x)\right)$

a) Dresser le tableau de variation h_n et en déduire son signe

b) Montrer que $\forall\ x \in]0,n[$, $f_n(x) \leq g_n(x)$. En déduire $\int_0^n f_n(t)dt \leq \int_n^{2n} f_n(t)dt$.

B) Pour tout $n \in N^*$, $x \in [0,+\infty[$, on pose $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$.

1) Montrer que F_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) Démontrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F_{n+1}(x)=(n+1)F_n(x)-f_{n+1}(x)$

3) En déduire que pour $x \in [0,+\infty[$, $F_n(x)=n!\left[1-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+.....+\frac{x^n}{n!}\right)\right]$.

4) Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)=n!$ et que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F_n(x) \leq n!$

5) a) Démontrer que $F_n(n)+\int_n^{2n} f_n(t)dt \leq n!$. En déduire que $0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2}$

b) Montrer que $\frac{1}{2}e^n \leq 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+..........+\frac{n^n}{n!} \leq e^n$

c) Utiliser ce qui précède pour déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{1}+\frac{n^2}{2!}+...+\frac{n^n}{n!}\right)\right)$