FONCTIONS EXPONENTIELLES

JUIN 2004

(I) soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1) calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}^*$

2) étudier le sens de variation de f

3) a) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

b) tracer la courbe (C_f)

(II) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n}$

1) prouver que $(\forall x > 0)$: $e^x \geq x + 1$

2) en déduire que $(\forall x > 0)$ $x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{x+1}$

3) a) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < U_n < \dfrac{1}{n+1}$

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

4) on pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

a) prouver que $V_n = \ln\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$

b) déterminer la limite de la suite $(V_n)_n$

JUIN 2005

(I) on considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) montrer que f est continue à droite de 0

b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

c) montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) montrer que $(\forall t \geq 0)$: $0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \dfrac{t^2}{2}$

c) montrer que $(\forall x > 0)$: $-\dfrac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{x}$

d) déduire la branche infinie de (C_f) en $+\infty$

3) tracer la courbe (C_f)

(II) soit n un entier naturel non nul .

on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \dfrac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1) montrer que f_n est dérivable à droite de 0

2) étudier le sens de variation de f_n sur $[0,+\infty[$

3) a) montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'équation $f_n(x) = \dfrac{2}{n}$ admet une unique solution a_n dans $]0,+\infty[$

b) montrer que $(\forall x > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f_{n+1}(x) - \dfrac{2}{x+1} > f_n(x) - \dfrac{2}{n}$

c) en déduire que $(a_n)_n$ est décroissante puis qu'elle est convergente . on pose $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ et prouver que $a = 0$

JUILLET 2006

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{x}{n} - e^{-nx}$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_n)

2) calculer la dérivée $f_n'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction f_n

3) a) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α_n

b) montrer que $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$

c) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $e^x \geq x + 1$ en déduire que $f_n(1) > 0$

d) montrer que $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < 1$

4) tracer la courbe (C_2) $\left(\text{on donne } \alpha_2 \simeq 0,6\right)$

5) a) montrer que $(\forall n \geq 2)\quad f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - \dfrac{1}{n} - 1\right)$

b) en déduire que $(\forall n \geq 2)$: $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

c) montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

6) a) montrer que $(\forall n \geq 2)$: $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

b) en déduire que $(\forall n \geq 2)$: $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < 2\frac{\ln(n)}{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

JUIN 2010

(I) on considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$

1) calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations

3) déterminer l'équation du demi-tangente à la courbe (C_f) en 0 et tracer (C_f)

(II) soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 4x^n e^{-x^2}$

1) a) montrer que $(\forall x > 1)$ $e^{-x^2} < e^{-x}$

b) en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) étudier le sens de variation de f_n puis dresser le tableau des variations

3) montrer que : $(\exists! u_n \in]0,1[)$ $f_n(u_n) = 1$

4) a) vérifier que $(\forall n \geq 2)$ $f_{n+1}(u_n) = u_n$

b) montrer que $(u_n)_n$ est croissante et convergente

5) on pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

a) montrer que $0 \leq l \leq 1$

b) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $-\frac{\ln 4}{n} < u_n < \frac{1-\ln 4}{n}$ en déduire la valeur de l

JUIN 2012

Soit n un entier naturel non nul . on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

2) a) étudier la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $-\infty$

b) montrer que la droite (D) $y = x$ est une asymptote oblique à (C_n) en $+\infty$, déterminer la position de (C_n) par rapport à (D)

3) étudier le sens de variation de f_n puis donner le tableau des variations

4) tracer la courbe (C_3) (on donne $f_3(-1,5) \simeq 0$; $f_3(-0,6) \simeq 0$; $\ln 3 \simeq 1,1$)

5) a) montrer que si $n \geq 3$ alors $\frac{e}{n} < \ln n$

b) montrer que si $n \geq 3$ alors $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que $x_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

c) calculer les limites $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

6) soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = -1 - x\ln x$; $x > 0$ et $g(0) = -1$

a) montrer que g est continue à droite de 0

b) vérifier que $(\forall n \geq 3)$ $g\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

1) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ que put-on déduire ?

b) étudier les variations de f puis dresser le tableau des variations

2) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

3) a) montrer que $(\forall x \in [0,1])$ $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$

b) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

4) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c) en déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite