الثانوية التأهيلية
المسيرة الخضراء - تيزنيت -
بخط الأستاذ :
البشير الحجلاوي

بسم الله الرحمن الرحيم

Fonction Exponentielle

Exercice 1 — 10 points — باك 2004 - الدورة العادية

I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$$

0,5 **1-** a- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ \frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$

0,5 b- En déduire que f est une fonction impaire.

0,5 **2-** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

1 **3-** a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

0,5 b- Dresser le tableau de variations de f

0,5 c- En déduire que : $\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ 1-\frac{2}{e^x+1}\leqslant\frac{1}{2}x$

0,75 **4-** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right)=0$, puis donner une interprétation graphique au résultat obtenu.

1,50 **5-** Représenter (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1,25 **6-** a- Sachant que : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$, montrer que :

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^x+1}\,dx=\ln\frac{e+1}{2}$$

0,75 b- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

II- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1};\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

0,5 **1-** Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n>0$.

0,5 **2-** a- En utilisant le résultat de la question I-3-c, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n$

0,5 b- Montrer que (u_n) est décroissante

0,75 **3-** Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis calculer $\lim u_n$

Exercice 2 — 4,5 points — باك 2006 - الدورة الاستدراكية

I- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x)=(x-1)e^x+(x+1)$

0,75 1- Calculer $g'(x)$, pour tout $x\in[0;+\infty[$, puis en déduire que g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

0,25 2- Montrer que : $\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ g(x)\geqslant0$ (Observer que $g(0)=0$)

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative de f sur un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1- Montrer que f est une fonction impaire.

0,75 2- a- Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.

0,5 b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$; puis interpréter le résultat obtenu graphiquement. (Observer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ f(x)=\frac{x}{e^x(1-e^{-x})^2}$)

0,75 3- a- Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{-e^x}{(e^x-1)^3}\cdot g(x)$

0,5 b- Dresser le tableau de variations de f

0,5 4- Représenter (C_f)

Exercice 3 — 9 points — باك 2007 ـ الدورة العادية

I- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=e^{-x}+x-1$$

0,75 1- Calculer $g'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis en déduire que g est croissante sur $[0;+\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty;0]$.

0,5 2- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)\geqslant 0$ (Observer que $g(0)=0$), puis en déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $e^{-x}+x\geqslant 1$.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative de f sur un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0,5 1- Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$
(On pourrait user le résultat de la question I-2)

0,25 2-a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$

0,5 b- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$; puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus.

0,75 3- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

0,5 b- Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

0,5 4-a- Écrire une équation cartésienne de la tangente (Δ) au point O l'origine du repère.

0,75 b- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$; puis étudier le signe de $(x-f(x))$ sur $\mathbb{R}$

0,25 c- En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ): $y=x$

1,00 5- Représenter (Δ) et (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
(On prend $\dfrac{1}{1-e}\simeq-0,6$)

III- On considère la suite (u_n) telle que : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

0,5 1- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\leqslant u_n\leqslant 1$

0,5 2- Montrer que (u_n) est une suite décroissante
(utiliser le résultat de la question II-4-b)

0,75 3- En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 — 8 points — باك 2008 ـ الدورة الاستدراكية

I- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{2x}-2x$

1,00 1- Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis montrer que g est croissante sur $[0;+\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty;0]$

0,75 2- En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)>0$ (Observer que $g(0)=1$)

II- Soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln(e^{2x}-2x)$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0,5 1- a- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

0,25 b- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)\cdot\dfrac{\ln(e^{2x}-2x)}{e^{2x}-2x}$

0,5 c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (Observer que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$)

0,25 d- En déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ à déterminer.

0,75 2- a- Pour tout $x>0$; vérifier que : $1-\dfrac{2x}{e^{2x}}>0$ et $2x+\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)=f(x)$

0,5 b. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5 c. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0,75 d. Montrer que : $\forall x\in[0;+\infty[\;; f(x)-2x\leq 0$; et en déduire que (C_f) est au dessous de (D) sur l'intervalle $[0;+\infty[$

0,75 3. a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

0,5 b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f

1,00 4. Représenter (D) et (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

(On admet que (C_f) possède deux points d'inflexion)

Exercice 4 — 9 points — باك 2009 ـ الدّورة العادية

I. Soit f la fonction définie par : $f(x)=2\ln\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

0,75 1. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2=(\sqrt{e^{x}}-1)^{2}+1$, puis en déduire que $D_f=\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}}>0$

0,75 2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln 4$ et interpréter ce résultat graphiquement

1,00 3. a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^{x}}(\sqrt{e^{x}}-1)}{(\sqrt{e^{x}}-1)^{2}+1}$, et vérifier que $f'(0)=0$

0,5 b. Étudier le signe de $(\sqrt{e^{x}}-1)$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

0,25 4. a. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=2x+2\ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}}\right)$

0,75 b. Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

0,25 5. a. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $e^{x}-3\sqrt{e^{x}}+2=(\sqrt{e^{x}}-1)(\sqrt{e^{x}}-2)$

0,5 b. Étudier le signe de $(\sqrt{e^{x}}-2)$ et $(\sqrt{e^{x}}-1)(\sqrt{e^{x}}-2)$ sur $\mathbb{R}$.

0,25 c. En déduire que : $\forall x\in[0;\ln 4]$; $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\leq\sqrt{e^{x}}$

0,75 d. Montrer que : $\forall x\in[0;\ln 4]$; $0\leq f(x)\leq x$

0,75 6. Représenter (C_f) (On admet que (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses α et β tels que $\alpha<-1$ et $\beta>2$)

II. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

0,75 1. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\leq u_n\leq\ln 4$

0,75 2. Montrer que (u_n) est décroissante.

1,00 3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 6 — 6 points — باك 2009 ـ الدّورة الاستدراكية

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\cdot\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0,5 1. a. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x\cdot\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

1,00 b. Montrer que f est une fonction paire et que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)-x=\dfrac{-2x\cdot e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

1,00 c. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-2x\cdot e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$; puis en déduire que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

0,5 2. Montrer que la courbe (C_f) est au dessous de (D) sur $[0;+\infty[$

1,00 3- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\dfrac{e^{4x}-1+4x.e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$, et vérifier que $f'(0)=0$

0,5 b- Montrer que : $\forall x\in[0;+\infty[\ ;e^{4x}-1\geq 0$, puis en duire que : $\forall x\in[0;+\infty[\ ;e^{4x}-1+4x.e^{2x}\geq 0$

0,5 c- Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

1,00 4- Représenter (C_f)

Exercice 7 — 8points — باك 2010 - الدّورة العادية

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+4x.e^{2x}$

0,5 1- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$

0,5 2- Montrer que g est croissante sur l'intervalle $[-\frac{1}{2};+\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-\frac{1}{2}]$

0,5 3- a- Montrer que $g(-\frac{1}{2})=1-\frac{2}{e}$; puis vérifier que $g(-\frac{1}{2})>0$

0,25 b- En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)>0$.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1,00 1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (Notons que : $\lim\limits_{u\to-\infty} u\,e^{u}=0$)

0,75 2- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=g(x)$ et en déduire que f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,75 3- a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et en déduire que (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

0,5 b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))$, puis en déduire que la droite d'équation $(\Delta): y=x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0,5 c- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (C_f), puis montrer que la courbe (C_f) est au dessous de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ et au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\frac{1}{2};+\infty[$

0,25 4- a- Montrer que $y=x$ est une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $O(0;0)$.

0,25 b- Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (On ne demande pas de déterminer son ordonné)

0,75 5- Représenter les deux droites (Δ) et (T) ainsi que la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=2cm)$

1,00 6- a- En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$

0,5 b- Montrer que l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f); la droite (T) et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=-\frac{1}{2}$ est $(6-2e)cm^2$

Exercice 8 — 9,5 points — باك 2011 - الدورة العادية

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(1-x)e^{x}-1$

0,5 1- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g'(x)=-xe^{x}$

0,75 b- Montrer que g est décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et vérifier que $g(0)=0$

0,5 — 2. En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)\leq 0$.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2-x)e^{x}-x$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

0,5 — 1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

0,75 — b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, puis en déduire que (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction à déterminer

0,75 — 2. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

(Notons que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$)

0,25 — b. Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0,5 — 3. a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=g(x)$

0,25 — b. Interpréter graphiquement le résultat $f'(0)=0$

0,5 — c. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f.

0,5 — 4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2}<\alpha<2$ (On admet que $e^{\frac{3}{2}}>3$)

0,5 — 5. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)+x=0$ et en déduire que la droite (D) coupe la courbe (C_f) au point $A(2;-2)$

0,25 — b. Étudier le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$.

0,25 — c. En déduire que (C_f) est au dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et qu'elle est au dessous de (D) sur $]2;+\infty[$

0,5 — 6. a. Montrer que le point $I(0;2)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe (C_f).

1,00 — b. Représenter la droite (D) et la courbe (C_f)

1,00 — 7. a. En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\frac{4}{e}$

0,25 — b. En déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) ; la droite (T) et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

Exercice 9 — 8 points — باك 2012 الدورة الاستدراكية

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0,75 — 1. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(-x)=-f(x)$ et en déduire que le point O est le centre de symétrie de la courbe (C_f).

0,5 — 2. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x+1-\frac{2}{e^{x}+1}$

(Vous pouvez utiliser cette formule de $f(x)$ dans le reste des questions)

1,25 — 3. a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=1+\frac{2e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$ et vérifier que $f'(0)=\frac{3}{2}$.

0,5 — b. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

0,5 — c. Montrer que $y=\frac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe au point O

0,5 — 4. a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,5 — b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))$ et on déduire que la droite d'équation (D) : $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0,25 — c. Montrer que la courbe (C_f) est au dessous de la droite (D).

1,5 — 5. Représenter les deux droites (D) et (T), ainsi que la courbe (C_f).

0,75 — 6. a. Montrer que la fonction $H : x\mapsto x-\ln(e^{x}+1)$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{e^{x}+1}$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 b- En déduire que : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{x}+1}\,dx = \ln 4 - \ln 3$

0,5 c- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$

Exercice 10 — 8 points — باك 2013 ـ الدورة العادية

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-2)^2 e^{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=1cm)$

0,75 1- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$, puis en déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique à déterminer sa direction.

0,25 2- a- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2e^{x}-4x.e^{x}+4e^{x}$

0,5 b- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, puis donner une interprétation graphique à ce résultat.

0,75 3- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=x(x-1)e^{x}$

1,00 b- Montrer que f est croissante sur les deux intervalles $]-\infty;0]$ et $[2;+\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $[0;2]$;

0,5 puis dresser le tableau de variations de f.

1,00 4- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f''(x)=(x^2-2)e^{x}$, puis en déduire que (C_f) admet deux points d'inflexion

(on ne demande pas de déterminer ses ordonnées)

1,00 b- Représenter (C_f)

0,5 5- a- Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^{x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^{x}$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\int_0^1 xe^{x}\,dx$

0,75 b- En utilisant l'intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^2e^{x}\,dx = e-2$$

0,5 c- Montrer que l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) ; l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est : $5(e-2)cm^2$

0,5 6- En utilisant la courbe (C_f), résoudre l'équation :

$x^2 = e^{-x}+4x-4$

Exercice 11 — 11 points — باك 2015 ـ الدورة الاستدراكية

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{x}-2x$.

0,75 1- Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty;\ln 2]$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[\ln 2;+\infty[$

0,5 2- Vérifier que $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$, puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$

0,5 3- En déduire que : $g(x)>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

II- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{e^{x}-2x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=1cm)$

1,00 1- a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$

(Observer que : $e^{x}-2x=x\left(\frac{e^{x}}{x}-2\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

0,5 b- Interpréter géométriquement les deux résultats précédents

0,75 2- a- Montrer que : $f'(x)=\frac{(1-x)e^{x}}{(e^{x}-2x)^2}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

0,75 b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f

0,25 c. Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point O

1,00 3. Représenter, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f) (On prend $\frac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on admet que (C_f) possède deux points d'inflexion d'abscisses α et β tels que $\alpha \in]0;1[$ et $\beta \in]\frac{3}{2};+\infty[$)

0,75 4. a. Montrer que : $\forall x \in [0;+\infty[\ ;\ xe^{-x} \leqslant \frac{x}{e^x-2x} \leqslant \frac{1}{e-2}$

0,75 b. En utilisant l'intégration par partie, montrer que : $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1-\frac{2}{e}$

0,5 c. Soit $A(E)$ l'aire, en cm^2, du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$

Montrer que : $1-\frac{2}{e} \leqslant A(E) \leqslant \frac{1}{e-2}$

III. Soit h la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par : $h(x)=f(x)$

0,5 1. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

0,5 2. Représenter $(C_{h^{-1}})$, la courbe représentative de h, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

IV. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = h(u_n)\ ;\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

0,5 1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \leqslant 0$

0,75 2. Montrer que (u_n) est croissante (Observer que, graphiquement, on a : $h(x) \geqslant x$ pour tout $x \in]-\infty;0]$)

0,75 3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 12

8,5 points

باك 2016 الدورة العادية

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ L'unité : 1cm

I. 0,25 1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

0,5 b. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,5 2. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5 b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$, puis interpréter ce résultat graphiquement

0,5 3. a. Montrer que : $f'(x)=2(e^x-1)^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

0,25 b. Dresser le tableau de variations de f. (Observer que $f'(0)=0$)

0,75 c. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]1;\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$

0,5 4. a. Montrer que la courbe (C_f) est au dessus de la droide (D) sur l'intervalle $]\ln 4;+\infty[$, et au dessous de (D) sur l'intervalle $]-\infty;\ln 4[$

0,5 b. Montrer que le point $A(0;-5)$ est l'unique point d'inflexion de (C_f)

0,75 c. Représenter la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend $\ln 4 \approx 1,4$ et $\alpha \approx 1,3$)

0,5 5. a. Montrer que : $\int_0^{\ln 2} (e^{2x}-4e^x)dx = -\frac{9}{2}$

0,5 b. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe

(C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite $x=\ln 4$

II – 1 – a – Résoudre l'équation différentielle : $(E): y''-3y'+2y=0$ 0,5

b – Déterminer la fonction g, solution de l'équation (E) qui vérifie les conditions suivantes : $g(0)=-3$ et $g'(0)=-2$ 0,5

2 – Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]\ln 4;+\infty[$ par : $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$

0,75 a – Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

0,75 b – Vérifier que $h(\ln 5)=\ln 5$, puis déterminer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$

Exercice 13

8,5 points

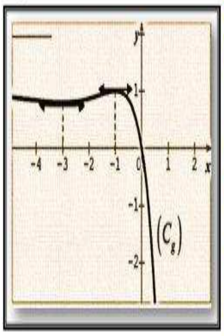
باك 2017 – الدورة الاستدراكية

I – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-(x+1)^2e^x$

0,25 1 – Vérifier que $g(0)=0$

1,00 2 – À partir de la courbe représentative de g (Voir ci-contre) ; montrer que :

$$\begin{cases} \forall x\in]-\infty;0] ;\ g(x)\geq 0 \\ \forall x\in[0;+\infty[;\ g(x)\leq 0 \end{cases}$$



II – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (L'unité : 2cm)

0,75 1 – a – Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$, puis en déduire que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

0,5 b – Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$, puis en déduire que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0,25 c – Montrer que la courbe (C_f) est au dessous de la droite (D)

0,5 2 – a – Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (Vous pouvez écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x)=x\left(1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right)$)

0,25 b – Montrer que la courbe (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique à déterminer sa direction.

0,75 3 – a – Montrer que : $f'(x)=g(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

0,75 b – Montrer que f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f

0,75 c – Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses : -3 et -1.

1,00 4 – Représenter la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend $f(-3)\approx-2{,}5$ et $f(-1)\approx-0{,}75$)

0,5 5 – a – Vérifier que : $H: x\mapsto(x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis montrer que : $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx=\frac{2}{e}-1$

0,75 b – En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$

0,5 c – En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) ; l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

Exercice 14

11 points

باك 2018 – الدورة العادية

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{-x}-x^2+3x-1$

Le tableau ci-contre, et le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25 1- Vérifier que $g(0)=0$

0,5 2- Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$

II - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=1cm)$

0,5 1- a- Vérifier que : $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+x$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

0,75 b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$, puis en déduire que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

0,5 c- Vérifier que : $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,5 d- Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, puis interpréter ce résultat graphiquement.

0,25 2- a- Vérifier que $f(x)-x$ et x^2-x ont le même signe pour tout $x\in\mathbb{R}$.

0,5 b- En déduire que (C_f) est au dessus de (D) sur les deux intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$, et qu'elle est au dessous de (D) sur l'intervalle $[0;1]$

0,75 3- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=g(x).e^{-x}$

0,5 b- En déduire que f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et qu'elle est croissante sur $[0;+\infty[$

0,25 c- Dresser le tableau de variations de f

0,25 4- a- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$

0,5 b- En déduire que (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4

1,00 5- Représenter (D) et (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend $f(4)\simeq 4,2$)

0,5 6- a- Vérifier que : $H:x\mapsto(x^2+2x+2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que :

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$$

0,75 b- En utilisant l'intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$$

0,75 c- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$

III - On considère la suite (u_n) telle que : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

0,75 1- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\leq u_n\leq 1$ (utiliser le résultat de la question II-3-b)

0,5 2- Montrer que (u_n) est une suite décroissante

0,75 3- En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15 11 points باك 2019 - الدورة الاستدراكية

Examens nationaux. 2 SC.EXP . exp . 2019-2020

Première partie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (L'unité 1cm)

0,5 1. a. Vérifier que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ et interpréter ce résultat graphiquement

0,5 b. Vérifier que : $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et interpréter ce résultat géométriquement

0,5 2. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 b. Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique à déterminer sa direction.

0,75 3. a. Montrer que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2+2x+4)e^{x-4}}{x^3}$$

0,25 b. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ x^2+2x+4>0$

0,75 c. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;2]$ et qu'elle est strictement croissante sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$

0,5 d. Dresser le tableau de variations de f

1,00 4. Représenter la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

0,5 5. a. Vérifier que la fonction $H : x\mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h : x\mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2;4]$

0,25 b. Vérifier que : $f(x)=2+8e^{x-4}-32\,\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$

0,5 c. Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}\,dx$

0,75 d. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=2$ et $x=4$

Deuxième partie

1. On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[2;4]$ par : $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$

0,25 a. Calculer $g(4)$

0,5 b. Vérifier que pour tout $x\in[2;4]$, on a :

$$g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$$

0,5 c. Vérifier que pour tout $x\in[2;4]$, on a : $e^{x-4}-1\leq 0$, puis en déduire que : $\forall x\in[2;4]\ ;\ g(x)\leq 0$

0,5 2. a. Vérifier que : $\forall x\in[2;4]\ ;\ f(x)-x=\frac{x-2}{x}g(x)$

0,25 b. En déduire que : $\forall x\in[2;4]\ ;\ f(x)\leq x$

3. Soit (u_n) la suite numerique définie par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

0,5 a. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ 2\leq u_n\leq 4$

0,5 b. Déterminer la monotonie de (u_n), puis en déduire que (u_n) est une suite convergente.

0,75 c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

حظ موفق إن شاء الله

نسألكم الدعاء