Exercice (1)

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2$; $x \neq 0$ و $f(0) = -1$

1) a) montrer que f est continue sur $\left[0,+\infty\right[$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

2) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique

3) a) montrer que $(\forall x > 0)$ $\ln x \leq x-1$

b) calculer $f'(x)$; $f''(x)$ et vérifier que $f'(1) = 0$

c) déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f

4) construire la courbe da la fonction f

Exercice (2)

Partie (1) soit g la fonction définie par : $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$

1) déterminer D_g et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} g(x)$

2) calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variation de g

3) déduire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(0) = 0$)

Partie (2)

on considère la fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} & x \neq 0 \ ; \ x \neq -1 \\ f(0) = 1 \ ; & f(-1) = 0 \end{cases}$

1) a) montrer f que au point 0 et à droite de -1

b) étudier la dérivabilité de f à droite de -1

2) a) montrer que $(\forall x \geq 0)$ $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

étudier la dérivabilité de f à droite de 0

b) soit x un réel de $\left]-1,0\right[$ et on considère la fonction φ définie sur $\left]-1,0\right[$ par :

$\varphi(t) = t^2\left(x - \ln(1+x)\right) - x^2\left(t - \ln(1+t)\right)$. Montrer que :

$\left(\exists c \in \left]x,0\right[\right)$ $\dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2(1+c)}$ puis étudier la dérivabilité de f à gauche de 0

3) montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

4) a) montrer que : $\left(\forall x \in \left]-1,+\infty\right[- \{0\}\right)$; $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(1+x)\left(\ln(1+x)\right)^2}$

b) dresser le tableau de variation de f

5) étudier la position de (C_f) par apport à (Δ) $y = x$ et construire la courbe (C_f)

Exercice (3)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = nx + \ln x$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) étudier le sens de variation de f_n et construire la courbe (C_1)

3) a) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ une seule solution u_n et que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $u_n<1$

b) montrer que $f_n(u_{n+1})=-u_{n+1}$, déduire la monotonie de la suite $(u_n)_n$

4) a) montrer que $(\forall x>0)$ $x>\ln x$, déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $u_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

b) déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nu_n}{\ln n}=1$

Exercice (4)

Partie (1) soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

2) montrer que : $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ et donner le tableau de variation de g

3) déduire que $(\forall x>0)$ $g(x)>0$

Partie (2)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $x\neq 0$ et $f(0)=0$

1) a) montrer que f est continue à droite de 0

b) montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ donner une interprétation géométrique du résultat

2) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f puis donner le tableau de variation

4) construire la courbe (C_f)

Partie (3) soit $(U_n)_{n>0}$ une suite telle que $U_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et on pose $V_n=\ln U_n$

1) a) vérifier que $V_n=f(n)$ et déduire que $(U_n)_n$ est croissante

b) montrer que $(\forall x>0)$ $\ln(1+x)<x$; déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $U_n<e$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{V_k}{k}$. exprimer S_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{\ln n}$

Exercice (5)

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e},\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$; $x\neq 0$ et $f(0)=0$

(C) la courbe de f dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) montrer que f st continue à droite de $x_0=0$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

2) calculer les limites $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x > \frac{1}{e}}} f(x)$

3) a) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

4) montrer que $f'(x) = \dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f

5) construire la courbe (C)

6) soit n un entier tel que $n \geq 2$.

a) montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{n}$ admet deux solutions u_n et v_n avec $e^{-1} < u_n < 1 < v_n$

b) (b1) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $v_n \geq \sqrt{n}$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

(b2) montrer que $(\forall x \geq 16)$ $\sqrt{x} > 1 + \ln x$ et déduire que $(\forall n \geq 16)$ $v_n \leq n$

(b3) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $\ln v_n = \dfrac{1}{2}\ln n + \ln(1 + \ln v_n)$ puis déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln v_n}{\ln n} = \dfrac{1}{2}$

c) (c1) montrer que $(u_n)_n$ est décroissante puis qu'elle est convergente

(c2) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1}$; déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^{-1}$

(c3) démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\left(u_n - e^{-1}\right) = e^{-2}$

Exercice (7)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x - n + \dfrac{n}{2}\ln x$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x)$

2) calculer $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n

3) a) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $1 \leq u_n < e^2$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $f_n(u_{n+1}) = 1 - \dfrac{1}{2}\ln u_{n+1}$ et déduire la monotonie de $(u_n)_n$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\ln u_n = 2 - \dfrac{2}{n}u_n$

d) calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n}u_n$ puis déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^2$

4) a) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $(\exists d > 0)$ $e^{\frac{2}{n}u_n} - 1 = \dfrac{2e^d}{n}u_n$

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $1 \leq \dfrac{e^{\frac{2}{n}u_n} - 1}{\frac{2}{n}u_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(e^2 - u_n\right)$