Mr : Chahed **Série Ln** **4eme math**

Exercice 1 : **1°/** Exprimer , à l'aide des réels $\ln(a)$ et $\ln(b)$ chacun des réels ci-dessous

a) $\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) + 2\ln(ab^3) + \ln(\sqrt{ab})$, **b)** $\ln(a\sqrt{b}) - \ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

2°/ Déterminer le plus petit entier n tel que $(\frac{1}{2})^n \leq 10^{-4}$

3°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquation ci-dessous

a) $\ln(x) + \ln(x-1) = 2$ **b)** $\ln(\ln(x)) = 0$ **c)** $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$

d) $\ln(x+2) - \ln(x-2) \leq 0$ **e)** $\ln(\frac{3x}{2}) \geq 1$

Exercice 2 : Déterminer les limites ci-dessous

1°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x$ **2°/** $\lim\limits_{x\to+\infty} ln^5(x) - x + 1$ **3°/** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$

4°/ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} + \ln(x)$ **5°/** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\, ln(1+\frac{1}{x})$ **6°/** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(x)}$ **7°/** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$

Exercice3:

1°/ Calculer les intégrales ci-dessous

$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$, $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$, $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$, $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}dx$, $\int_1^2 \frac{x+1}{x}\, dx$

2°/ A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_1^e \ln(x+1)\, dx$; $J = \int_0^1 (x+1)\ln(x+1)\, dx$.

$K = \int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$; $L = \int_1^e (\ln(x))^2\, dx$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

a. Montrer que pour tout $x \epsilon \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $et\ f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}^3}$

b. Montrer que f est impaire et que $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

c. Dresser le tableau de variation de f et tracer (C) en préciser sa tangente en O

d. Calculer l'air de la partie limité par (C) et la droite $y = 0, x = 0\ et\ x = 1$

2) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $1 - \frac{x^2}{2} \leq f'(x) \leq 1$ puis que $x - \frac{1}{6}x^3 \leq f(x) \leq x$

3) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}dt\ si\ x > 0 \\ F(0) \quad = \ln(2) \end{cases}$

a. En utilisant 2) Montrer que $\forall\ x > 0$ on a : $\ln(2) - \frac{1}{4}x^2 \leq F(x) \leq \ln(2)$

b. Puis déduire que F est dérivable à droite en 0

c. Montrer que $\forall\ x > 0$ $\frac{f(x)}{4x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

d. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = \frac{f(2x)-2f(x)}{2x^2}$

e. Soit φ la fonction définie $]0,+\infty[$ par $(x) = f(2x) - 2f(x)$. Montrer que $\varphi(x) < 0$

f. Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe

Exercice5 Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$ et $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2lnx$

1/ Etudier les variations de g .En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique αet que $1{,}8 < \alpha < 2$.
Préciser le signe de $g(x)$

2/ Vérifier que $(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$, puis dresser le tableau de variation da f et tracer sa courbe C

3/ Soit F la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

a) Etudier le signe de F ainsi que son sens de variation

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$

c) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $lnx \leq \sqrt{x}$ puis que $(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$. En déduire que pour $x \geq 1$, on a : $F(x) \leq 2$

d) Montrer que F admet une limiten finie β en $+\infty$ et en déduire que $\lim\limits_{0^+} F = \beta$

4/ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 1$ on pose $I_n(x) = \int_1^x t^n lntdt$ et soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

a) Montrer que $I_n(x)=\frac{x^{n+1}lnx}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$ .En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} I_n(x)$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour >1 , $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

c) Montrer que pour tout $\in\mathbb{N}$, $|u_n-\beta|\le\frac{1}{(2n+3)^2}$. En déduire la limite de u.

Exercice 6: **1/** Etudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction g définie par $g(x)=ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$ .En déduire le signe de $g(x)$

2/ Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=xln\left(1+\frac{1}{x}\right) & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Dresser le tableau de variation de f .En déduire que $\forall x\ge1$, $f(x)\ge ln2$

c) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité :2 cm

d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par C_f et les droites d'équations $x=1$, $x=2$ et $y=1$

4/ On pose : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=\frac{n^n}{n!}$

a) Montrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

b) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge2$. En déduire que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\ge2^{n-1}$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ puis déterminer la limite de la suite V définie par $V_n=ln(U_{n+1})-ln(U_n)$

Exercice 7: Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{xlnx}$

1/ Dresser le tableau de variation de f

2/ Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a : $\frac{1}{klnk}\ge\int_k^{k+1}f(x)dx$

3/ On considère les suites définies par $I_n=\int_2^{n+1}f(x)dx$ et $U_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{klnk}$

a) Calculer I_n en fonction de n

b) Montrer que pour tout entier $n\ge2$ on a : $U_n\ge I_n$. Déduire que la suite (U_n) n'est pas convergente

Exercice 8: Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{x^2}{1+lnx}$

1/ Dresser le tableau de variation de .

2/ En déduire que pour tout réel x de $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$, $f(x)\ge\frac{2}{e}$

II- Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

1/ Justifier que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et donner $F'(x)$ pour tout réel x de $[1,+\infty[$

2/ Montrer que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $F(x)\ge\frac{2}{e}(x-1)$ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3/ a) Montrer que pour tout réel x de $]3,+\infty[$, $F(x)\ge\int_{\frac{x}{3}}^{x}f(t)dt$

b) Montrer que pour tout réel x de $]3,+\infty[$, il existe un réel c de l'intervalle $\left[\frac{x}{3},x\right]$ tel que : $F(x)\ge\frac{2c^2}{3(1+lnc)}x$

c) En déduire que pour tout réel x de $]3,+\infty[$, $\frac{F(x)}{x}\ge\frac{2x^2}{27(1+lnx)}$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

4/ Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Exercice 9 : On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n=\frac{1}{n}\int_1^2\frac{(lnx)^n}{x^2}dx$

1/ En intégrant par parties, calculer I_1

2/a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n\le\frac{(ln2)^n}{n}$

d) Déterminer la limite de la suite (I_n)

3/ a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=nI_n-\frac{1}{2}\frac{(ln2)^{n+1}}{n+1}$

b) En déduire $\int_1^2\left(\frac{1+lnx}{x}\right)^2dx$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x & si\ x>-1 \\ f(-1)=1 \end{cases}$

1/ Etudier f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.$\|\vec{\imath}\|=2\ cm$

2/ Soit $\in]-1\,,0[$, on note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par C et les droites d'équations $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = -x$ .Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α puis déterminer $\lim\limits_{\alpha \to (-1)^+} \mathcal{A}(\alpha)$

II- Soit g la fonction définie sur $[-1\,,0]$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} & si\ -1 < x < 0 \\ g(-1) = 0 \ \text{ et } g(0) = 1 \end{cases}$

1/a) Montrer que g est continue sur $[-1\,,0]$

Etudier la dérivabilité de g à droite en (-1)

2/a) Montrer que pour tout réel x de $]-1\,,0]$, $0 \le \int_x^0 \frac{t^2}{1+t}dt \le \frac{-x^3}{3(1+x)}$

b) En déduire que pour tout réel x de $]-1\,,0]$, $\frac{x^2}{2} \le x - \ln(1+x) \le \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3(1+X)}$

c) Montrer alors que g est dérivable à gauche en 0 et que $g'_g(0) = \frac{1}{2}$

3/a) Montrer que $g'(x)$ a le même signe que f(x) sur $]-1\,,0[$

b) Dresser le tableau de variation de g puis tracer sa courbe dans un autre repère orthonormé

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4\ln(x)}{x^2}$

1.a Vérifier que pour tout $x > 0 : f'(x) = 4\left(\frac{1-2\ln(x)}{x^3}\right)$

b. Dresser le tableau de variation de f puis tracer C

c. Calculer l'aire du domaine limité par C_f et les droites d'équations $x = 1$, $x = \sqrt{e}$

d. Pour tout entier naturel $n \ge 4$

Montrer que l'équation $f(x) = \frac{2}{n}$ admet exactement deux solutions u_n et v_n

tels que $1 \le u_n \le \sqrt{e} \le v_n$

2.a Montrer que pour tout réel $t \in [0\,,+\infty[$ on a $1 - t \le \frac{1}{1+t} \le 1$

b. En déduire que pour tout réel $a \in]0\,,+\infty[$ $a - \frac{a^2}{2} \le \ln(1+a) \le a$

4.a En utilisant le résultat de la question

2.b montrer que pour tout entier naturel $n \ge 4$

On a $\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \le \ln(u_n) \le u_n - 1$

b. En déduire que pour entier naturel $n \ge 4$ on a $\frac{1}{2n} \le u_n - 1 \le \frac{e}{n}$ puis déterminé La limite de (u_n)

Exercice12

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(2+t^2)}dt$

1.a. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

b. En déduire que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c. Montrer que F est impaire

2.a. Ecrire une équation de la tangente T a C au point d'abscisse 0

b. Vérifier que pour tout $t \in [0\,,+\infty[$ on a $\frac{1}{\ln(2+t^2)} \le \frac{1}{\ln(2)}$

c. Etudier alors la position de C et T sur $]0\,,+\infty[$

3. a. Montrer que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ on a $\frac{x}{\ln(2+4x^2)} \le F(x) \le \frac{x}{\ln(2+x^2)}$

b. Dresser le tableau de variation de F puis tracer C et T

Exercice13

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x(1+\ln^2(x))$ si $x > 0$

Et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) a. Montrer que f est continue à droite en 0

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat

2) a. Dresser les tableaux de variations de f

d. Tracer C

3) Soit $\alpha > 0$ et $I(\alpha) = \int_\alpha^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx$

a. Calculer $I(\alpha)$

b. Calculer l'aire de la partie du plan limité par C et les droites d'équations respectives

$x = 0$,$x = \frac{1}{e}$. et $y = 0$

4) Soit n un entier naturel tel que $n \ge 2$

On considère la fonction g_n définie sur $[n,+\infty[$ par $g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{dt}$

a) On admet que pour tout $t \geq 0$ on a $\ln(1+t) \leq t$.

Montrer que pour tout $x \geq n$ on a $g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

b) Dresser le tableau de variation de g_n

c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe un unique $\alpha_n \in [n,+\infty[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 1$

d) Montrer que pour tout $n \geq 2$; $\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{dt} = \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}+1} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{dt}$

e) En déduire que (α_n) est strictement croissante et déterminer sa limite

Exercice 14

Soit n un entier naturel non nul

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x\big(1-\ln(x)\big)^n$ si $x > 0$

Et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a. Montrer que f_n est continue à droite en 0

b. Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0 et interpréter le résultat

2) a. Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2

b. Étudier la position relative des courbes C_1 et C_2

c. Montrer que toutes les courbes C_n passent par trois points fixe

d. Tracer C_1 et C_2

3) Calculer l'aire de la partie du plan limité par C_1 et les droites d'équations respectives

$x = 1$,$x = e$ et $y = 0$

4) Soit (u_n) la suite définie sur N*par $u_n = \int_1^e f_n(x)\,\mathrm{d}x$

a. Montrer que (u_n)est décroissante et minoré

b. Montrer que pour tout $n \in$ N* on a $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$

c. En déduire l'aire de la partie du plan limité par

C_1 , C_2 et les doutes équations respectives $= 1$,$x = e$

d. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ puis déduire $\lim(u_n)$ et $\lim(nu_n)$

5) Soit a un réel différent de u_1 , (v_n) la suite définie sur N*par $v_1 = a$ et $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n$

Et $d_n = |v_n - u_n|$

a. Montrer que pour tout $n \in$ N*$d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$ puis montrer que $\lim(d_n) = +\infty$

b. En déduire que (v_n) est divergente