



RESUME DU COURS

Définition : La fonction logarithme népérien, noté \ln , est la primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1, de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$. On donc, pour tout réel $x > 0$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Conséquence : \ln est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout réel strictement positif on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ de plus $\ln(1) = 0$.

Propriétés algébriques : pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$$

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a \quad \text{Limites :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{Pour tous entiers naturels non nuls } n \text{ et } m, \text{ on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n(x)}{x^m} = 0 \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^m \ln^n(x) = 0$$

Equations et inéquations : Pour tous réels x et x' strictement positifs, on a :

$$\ln x = \ln x' \Leftrightarrow x = x' \quad \ln x < \ln x' \Leftrightarrow x < x' \quad \text{En particulier : } \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ et } \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Dérivée de $\ln(u)$ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$, pour tout réel x dans I alors $\ln(u)$

est dérivable sur I et in a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ pour tout réel x dans I

Théorème : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la

fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Corollaire : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

admet des primitives de la forme : $\ln(|u|) + c$ où c est une constante réelle.



LES EXERCICES

Exercice N°1 :

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse :

1. L'ensemble de définition de l'équation : $\ln(x+3) = \ln(x^2-9)$ est :

- a. $\{-3 ; 3\}$ b. $]3, +\infty[$ c. $] -3 ; 3[$ d. $] -\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) =$ a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$ a. 0 b. 1 c. $+\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x-1}{6x+2}\right) =$ a. $-\ln 2$ b. 0 c. $+\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x} =$ a. 1 b. $+\infty$ c. 0

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$ a. $+\infty$ b. 0 c. 1



Chapitre logarithme

7. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$ a. $\frac{1}{2}$ b. 1 c. e

8. $\int_2^3 \frac{t}{t^2-1} dt =$ a. $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{3}\right)$ b. $\frac{3}{2}$ c. 1

9. $\int_1^e \frac{1}{x \cdot \ln^3(x)} dx =$ a. 1 b. $-\frac{1}{2}$ c. e

10. f est la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$ est une fonction :

- a. Paire. b. impaire c. Ni paire, ni impaire.

Exercice N°2 : La courbe ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'une fonction f définie et dérivable

sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et Δ la droite d'équation y = 1

1. Dresser le tableau de variation de f.

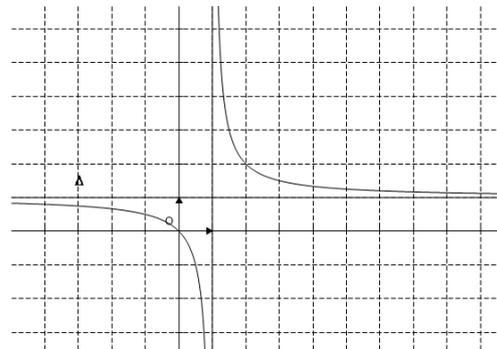
2. On pose $g(x) = \ln(f(x))$.

a. Déterminer le domaine de définition de g.

b. Déterminer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$;

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe.



Exercice N°3 : Soit la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = -\frac{2}{x+2} + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. Dresser le tableau de variation de φ puis en

déduire le signe de φ(x).

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

3. Dresser le tableau de variation de f et construire (ζ_f) dans un repère orthonormé.

4. Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} x - 2 \ln(x+2) + \frac{1}{2} x^2 \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0. b). Montrer que g est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

5. Soit la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(u_n) = f(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

b) Montrer que la suite (u) est convergente et calculer sa limite.



Chapitre logarithme

b. Montrer que la représentation graphique Γ de G est l'image de (C_1) par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

4. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \ln(f(x))$.

a) Préciser le domaine de définition de h . b) Dresser le tableau de variation de h .

Exercice N°7 : Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x)$.

1. Etudier f et tracer sa courbe.

2. a) Etudier le sens de variation de f' .

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\frac{\ln(1+x)}{x} \leq f(1+x) - f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

c) Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln k}{k}$. Montrer que pour tout $n \geq 3$: $U_n \geq f(n+1) - f(3) + \frac{\ln 2}{2}$ et en déduire la limite de U .

Exercice N°8 : Soit $h(x) = 1 - x + x \ln x$ pour tout $x > 0$. a) Donner le signe de $h(x)$ pour tout $x > 0$. b) Montrer que

pour tout $x > 1$, on a : $1 < \frac{x \ln x}{x-1} < 1 + \ln x$

1. Déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^* : 1 < (k+1) \ln \left(\frac{1+k}{k} \right) < 1 + \ln \left(\frac{1+k}{k} \right)$.

2. Soit U la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (k+1) \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)$.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* : 1 < U_n < 1 + \ln \left(\frac{1+n}{n} \right)$. b) Déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.

Exercice N°9 : Pour tout un entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$

1. a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déduire la limite (I_n) .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{1+n}$.

3. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$. Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_k$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice N°10 : Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f_n(x) = \ln(x-1) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ où n est entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f_n .

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution (α_n) .

3. a) Montrer que : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (α_n) . c) En déduire que la suite (α_n) est convergente



Chapitre logarithme

Exercice N°11: Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On notera par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Soit $\varphi(x) = 2\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

a) Etudier le sens de variation de φ sur $[0, +\infty[$. b) En déduire que pour tout $x > 0$ on a $\varphi(x) > 0$.

2.a) Montrer que f est dérivable à droite en 0. b) Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ .

3.a) Montrer que pour $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$.

b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite (D) d'équation : $y = x$.

4.a) Vérifier que $t \in [0, +\infty[$, on a : $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$.

b) En déduire que : $x \in [0, +\infty[$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

c) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

5.a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ (on posera $X = \frac{1}{x}$). Interpréter le résultat géométriquement.

b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite $\Delta : y = x - \frac{1}{2}$. c) Tracer dans le même repère (ζ_f) et (ζ_f^{-1}) .

6.a) Soit $\lambda \in]0, 1[$ et A_λ : l'aire de la région du plan limitée par (ζ_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$. Calculer A_λ et $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A_\lambda$.

b) En déduire l'aire de la partie limitée par (ζ_f^{-1}) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$.

Exercice N°12: A- La courbe ci contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.

1. Par lecture graphique :

a) Déterminer les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2. On admet que
$$\begin{cases} f(x) = \frac{a + \ln x}{b + x} & \forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

où a et b sont deux réels. Déterminer l'expression de f .

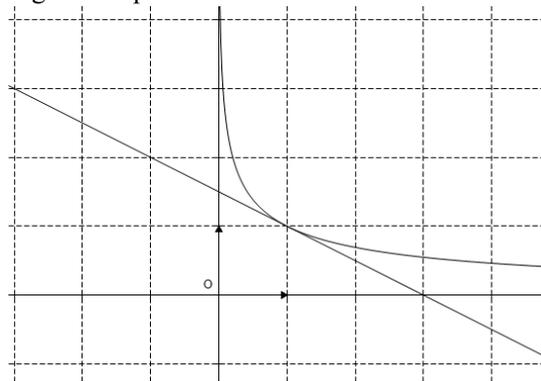
On prend $a = 0$ et $b = -1$.

a) Montrer que f réalise une bijection de

\mathbb{R}_+^* sur $f(\mathbb{R}_+^*) = J$ à préciser.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T' à C_f^{-1} au point d'abscisse 1.

c) Tracer (C_f^{-1}) .



Chapitre logarithme

3. Soit D la partie du plan limitée par (C_f) ; (C_f^{-1}) ; $[AB]$ et $[AC]$ où $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $B\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ et $C\left(f\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right)$. Soit A l'aire, en

unité d'aire, de D. Montrer que $A = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \frac{3}{4}$

B- 1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ où $n \in \mathbb{N}$.

2. Dédire que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -\sum_{k=0}^n u_k + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) dx$ avec $u_k = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k \ln(x) dx$.

3. Calculer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a : $x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1} \ln x}{x-1} \leq 2 \ln 2 \cdot x^{n+1}$

5. Dédire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) dx = 0$ 6. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\sum_{k=0}^n u_k\right] = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$.

Exercice N°13 A- Soit la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Soit $h \in]0, +\infty[$. On définit sur \mathbb{R}_+ la fonction $g : x \mapsto \left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right] x^2 - \ln(1+x) + x$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel : $c \in]0, h[$ tel

que : $\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{-1}{2(c+1)}$.

b) Prouver donc que : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right) = \frac{-1}{2}$ c) Prouver enfin que f est dérivable à droite en 0 et que : $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

2. a) Justifier que : $\forall x \geq 0 : \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ b) Dédire que $\forall x \geq 0 : \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0$.

c) Donner enfin le signe de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

3. Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f .

B- Pour tout $a \in]0, 1]$, on pose : $u_n = \int_0^a t^n f(t) dt$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) . 2. Prouver que (u_n) est convergente.

3.a) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $f(x) \leq 1$. b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } u_n \leq \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

c) Préciser donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice N°14 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ et $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

1.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ puis calculer sa limite.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ puis calculer U_1 .

2. On pose $S_n = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$



Chapitre logarithme

a) Montrer que : $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que : $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b) En déduire que : $|V_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$ puis calculer la limite de (V_n) .

3.a) En utilisant une intégration par parties pour U_n , montrer que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\ln 2 - V_n)$

b) En déduire la limite de (Φ_n) définie par : $W_n = (n+1) U_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°15 : Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1. Etudier le sens de variation de f .

2.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \frac{\ln(k)}{k^2}$

b) Par une intégration par parties, calculer $\int_a^b \frac{\ln x}{x^2} dx$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln(n)}{n^2}$.

a) Montrer que pour tout, on a : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$

b) En déduire que : $\frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{n + (n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2 + 3\ln 2}{4} - \frac{1 + \ln(n)}{n}$

c) Donner un encadrement de S_{100} à 10^{-2} près

Exercice N°16 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b) Montrer que la suite (I_n) est convergente et par suite elle est convergente.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2.a) Par une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right)$

3. On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = 1 + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{(\ln 2)^2}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}$.

a) Exprimer (u_n) en fonction de I_n .

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice N°17 : I- Soit la fonction g définie sur $]0 ; 1]$ par : $g(x) = 2 - 2x + \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g .

2) Montrer que $g(x) = 0$ admet dans $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$ une solution unique α et que : $\forall t \in [\alpha, 1]$ on a : $2t - 2 \leq \ln t$.

3) Construire la courbe de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (Unité : 4cm).

Chapitre logarithme

4) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$

II- Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{1}{2}[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1) Montrer que f est dérivable $]0, \frac{1}{2}[$ sur et que : $F'(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(2x)\ln(x)}$.

2) Montrer que $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$ on a : $\frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$. Déterminer alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

3) Montrer que : $\forall x \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$, on a : $F(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$. Déterminer alors : $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} F(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de F .

5) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'équation : $1 + n F(x) = 0$ admet dans $]0, \frac{1}{2}[$ une solution α_n .

b- Montrer que (α_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente

Exercice N°18 : Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t)]^n dt$

1-a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b) Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n$. c) En déduire I_2 puis $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t) - 1]^2 dt$.

2-a) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{3}{2}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire que (I_n) est convergente.

3-a) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \leq I_n \leq \frac{2\sqrt{e}}{2n+1}$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nI_n)$.

Exercice N°19 : I- Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$.

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1, +\infty[$ deux solutions 0 et α et vérifier que $3,8 < \alpha < 4$

3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. 4) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a : $g(x) \leq 1$.

II- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) la courbe représentative de

f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

3) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

4) Dresser le tableau de variation de f et vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

5) Tracer la courbe (C) de f .



Chapitre logarithme

III- Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{(3n)!}{n^n (2n)!}$.

1) En utilisant I-4)- montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $\ln(1+x) \geq \frac{x-1}{1+x}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. a- Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \geq \frac{k}{3n}$.

b- Vérifier que : $\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \ln(u_n)$ c- En déduire que : $\ln(u_n) \geq \frac{1}{6}(n+1)$

d- Déterminer alors la limite de u_n .

Exercice N°20 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe

représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1-a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe (C).
- d) Tracer (C) en précisant la tangente à (C) en A.

2- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose : $F_p(x) = \int_x^1 \sqrt{t} (\ln(t))^p dt$ où $x \in]0; 1[$

a) Calculer $F_1(x)$ puis vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_1(x) = -\frac{4}{9}$.

b) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et que pour tout réel $x \in]0; 1[$, on a :

$$F_{p+1}(x) = -\frac{2}{3} x \sqrt{x} [\ln(x)]^{p+1} - \frac{2}{3} (p+1) F_p(x).$$

c) Montrer par récurrence que $F_p(x)$ admet une limite finie $u_p = (-1)^p (p!) \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice N°21 : I- Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^3 - 2 \ln x$. Etudier les variations de g , calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

II- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ et dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que (C) admet une asymptote oblique D et étudier la position relative de (C) et D.

3) a- Soient α et β deux réels tels que : $1 < \alpha < \beta$, calculer : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

b- Interpréter géométriquement I.

III- Soit $(U_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par : $U_n = \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$.

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, on a : $U_n = \frac{1}{2}(1 + \ln 2) - \frac{1}{n}(1 + \ln(n))$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.



Chapitre logarithme

3) On pose pour tout $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{\ln k}{k^2}$

a- Etudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$.

b- Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

c- En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a : $U_n + \frac{\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq U_n + \frac{\ln 2}{2^2}$.

d- Montrer que (S_n) est convergente et en déduire un encadrement de sa limite.

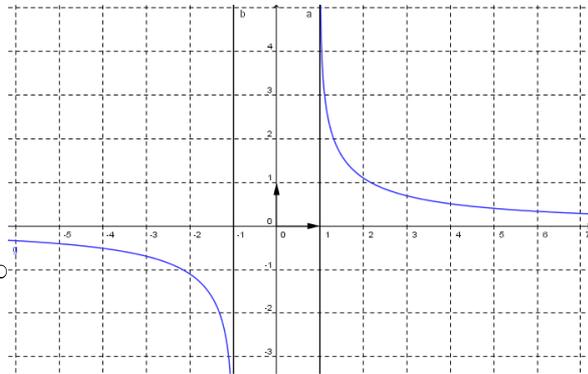


Les solutions

Exercice N°1 : 1.b 2.c 3.a 4.a 5.c 6.c 7.a 8.a 9.b 10.b

Exercice N°2 :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	1		1



1.a) $D_g =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ / $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = -\infty$ / $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	—			—
$g(x)$	0			0

Exercice N°3 :

1. On a φ est dérivable sur son domaine de

définition et $\varphi'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+			+
$\varphi(x)$	+			0

D'après le tableau de variation : $\varphi(x) > 0 \forall x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$.

1. **Continuité à droite en 0 :** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+2) - x \ln x$

$= 0 \ln(2) - 0 = 0 = f(0)$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ donc f est continue à droite en 0.

Dérivabilité à droite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty$ alors f n'est pas

dérivable à droite en 0.

2.a) $f'(x) = \varphi(x) > 0$.

$\lim_{+\infty} f = 2$ alors (ζ_f) admet $\Delta : y=2$ comme asymptote

horizontale au voisinage de $+\infty$ et $\lim_{-\infty} f = 2$ alors (ζ_f)

admet $\Delta : y=2$ comme asymptote horizontale au

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	2			2



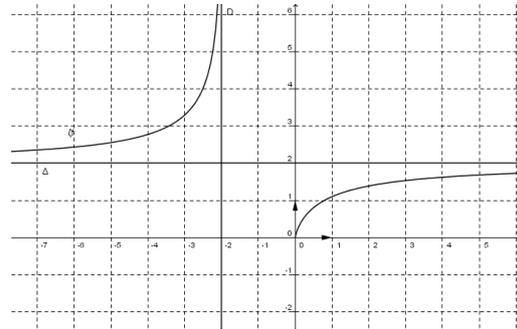
Chapitre logarithme

voisinage de $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty$ alors (ζ_f) admet

D : $x = -2$ comme asymptote verticale au voisinage de -2 . $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ alors (ζ_f) admet une demi tangente

verticale au point $O(0; 0)$ d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq f(0) = 0 \end{cases}$

b) voir figure :



3. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 \ln(x+2) + \frac{1}{2} x \left(x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) \right) = 0 - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \times 0 \times 0 = -2 \ln 2$ donc g est continue à droite en 0.

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - 2 \ln(x+2) + 2 \ln 2}{x} \right) + \frac{1}{2} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2 \ln \left(\frac{x+2}{2} \right)}{x} + \frac{1}{2} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{\frac{x}{2}} \right) + \frac{1}{2} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) &= 1 - 1 + 0 = 0 = f(0) \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \text{ donc } g'(0) = f(0) \text{ or} \end{aligned}$$

$\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = f(x)$ donc $\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = f(x)$ et par suite g est la primitive de f sur $]0, +\infty[$

$$4. \text{ a) } \ln(u_n) = \ln \left[\left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n+1} \right] = (n+1) \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) = n \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) = f(n) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 2 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 2 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$$

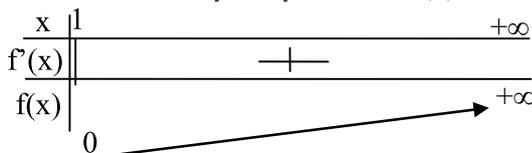
Exercice N°4 : 1) $x \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R} , en particulier sur $]1, +\infty[$ de plus $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$ et

$\forall x \in]1, +\infty[$ on a : $\ln x \geq 0$ alors $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ est continue sur $]1, +\infty[$ ainsi f est continue sur $]1, +\infty[$.

$$2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \sqrt{\ln x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{(x - 1) \sqrt{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} \times \frac{x}{\sqrt{\ln x}} = +\infty \text{ ainsi } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 1$$

d'où (C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

$$\text{b) } f \text{ est dérivable sur }]1, +\infty[\text{ et on a : } f'(x) = \sqrt{\ln x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\ln x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} > 0$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\ln x} = +\infty$$



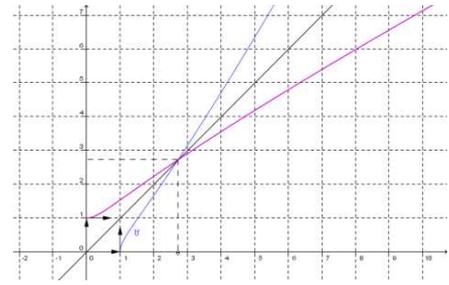
Chapitre logarithme

4) a) Soit $x \in [1, +\infty[$. si $M(x, y) \in (C) \cap \Delta$ équivaut à $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$

5) $\Rightarrow f(x) = x$ équivaut à $x\sqrt{\ln x} = x$ or $x \neq 0$ équivaut à $\ln x = 1$
donc $x = e$. ainsi $(C) \cap \Delta = \{A(e, e)\}$.

b) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln x} = +\infty$

alors (C) admet branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction (O, \vec{j}) .



4) a) f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [0, +\infty[$. f admet alors une fonction réciproque g définie sur $[0, +\infty[$.

b) $(C') = S_{\Delta}(C)$

5) a) Pour $n = 0, u_0 = 0$. $0 \leq u_n \leq e$ (vérifie). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $0 \leq u_n \leq e$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq e$. On a $0 \leq u_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ d'où

$g(0) \leq g(u_n) \leq g(e)$ équivaut à : $1 \leq u_{n+1} \leq e$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq e$.

b) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$ or (C') est au dessus de Δ sur $[0, e]$ donc $g(x) \geq x \forall x \in [0, e]$ et comme $u_n \in [0, e]$ alors $g(u_n) \geq u_n$ c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$ alors (u) est une suite croissante.

c) la suite (u) est une suite croissante et majorée par e donc elle est convergente. Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

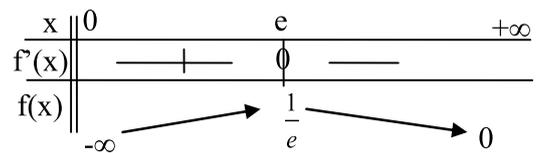
$0 \leq u_n \leq e$ donc $0 \leq l \leq e$. On a f est continue sur $[1, +\infty[$ donc g est continue sur $[0, +\infty[$ et en particulier en l d'où $g(l) = l$. Or e est la seule solution de l'équation $f(x) = x$ donc $g(l) = l$ équivaut à $l = e$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$

Exercice N°5: A-1) a- f est définie et continue sur $]0, +\infty[$. $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}(1 + \ln x)$ et $f'(x) = 0$ équivaut à $x = e$.

b- Pour tout $n \geq 3$ on a : $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$ et comme f est continue

et strictement croissante sur $[1, e]$ donc elle réalise une bijection de $[1, e]$ sur $f([1, \frac{1}{e}]) = [0, e]$ or $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$ alors il existe une unique

solution $a_n \in [1, e]$ de l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$.

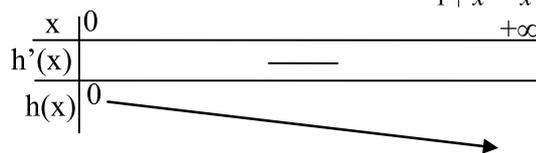


c- On a $f(a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ et $f(a_n) = \frac{1}{n}$ alors $f(a_{n+1}) < f(a_n)$ et f est une fonction croissante sur $[1, e]$ alors $a_{n+1} < a_n$.

Donc a_n est une suite décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

2) a- On pose $h(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$, h est une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$

D'où $h'(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$. D'après le tableau de variation on a $h(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.



b- Montrons que : $(1+x)\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \leq x - \frac{1}{2}x^2$?

On a $(1+x)\frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + x^2 = x\left(-\frac{1}{2} + x\right) \leq 0$ car $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.



Chapitre logarithme

Donc : $(1+x)\frac{1}{2}x \leq \ln(1+x)$ or $1+x > 0$ car $x > 0$ donc $\frac{1}{2}x \leq \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

c- on a $n \geq 4$ alors

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ équivaut à $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$ c'est à dire $\frac{2}{n} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. D'après la question 2)b- on prend $x = \frac{2}{n}$ on

aura : $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \leq \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}$ équivaut à $\frac{1}{n} \leq \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}$ c'est à dire $f\left(\frac{2}{n}\right) \leq f\left(1+\frac{2}{n}\right)$ or f est une fonction croissante sur $[1, e]$

donc $a_n \leq 1 + \frac{2}{n}$ 3) On a $1 \leq a_n \leq 1 + \frac{2}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

B-1) On a $x > 0$: $f(x) \leq \frac{1}{e}$ signifie que $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} < 1$ alors $\ln x < x$ car $x > 0$ d'où $\ln(x) - x < 0$. Donc g est bien définie sur $[0, +\infty[$.

$$2) \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} = \frac{1}{0^- - 1} = -1 = g(0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) + x - \ln(x)}{x(x - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \ln x} = 0$$

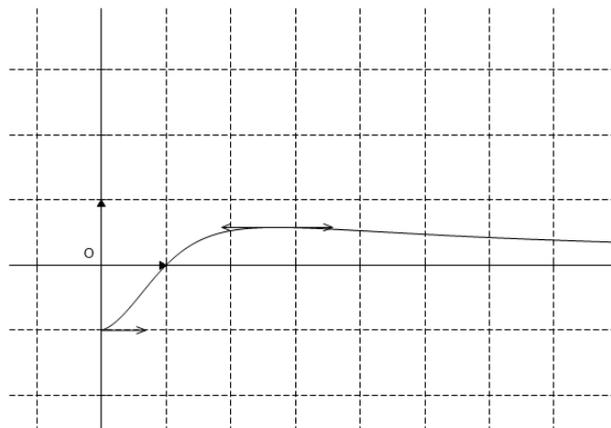
$$3) g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

le signe de $g'(x)$ est celui de $(1 - \ln x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} = 0$$

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	0	0	
$g(x)$		$\frac{e}{e-1}$	0

4) Courbe



Exercice N°6:

1. On suppose que (C_1) est celle de la fonction f . On a $F'(x) = f(x)$ et $f(2) = 0$ donc $F'(2) = 0$ et par suite (C_1) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2. Ceci est impossible d'après le graphe. Donc (C_2) est celle de la fonction f .

$$2. \bar{F} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(t) dt = [F(t)]_0^1 = F(1) - F(0) = e - 2$$

$$3. A = \left(\int_0^2 |f(t)| dt \right)_{ua} = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^2 f(t) dt = F(1) - F(0) - [F(2) - F(1)] = e - 2 + e - 0 = (2e - 2)_{ua}$$

4. a) f est continue sur \mathbb{R} donc G est dérivable sur \mathbb{R} et $G'(x) = f(x)$.

b) $G(x) = F(x) - F(0) = F(x) - 2$ équivaut à

$G(x) - F(x) = -2$. Soient $M(x, F(x)) \in (C_1)$ et

$M'(x, G(x)) \in \Gamma$ où x est réel alors : $\overline{MM}' = -2j$

équivaut à $\Gamma = t_{-2j}(C_1)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$G'(x)$		0	
$G(x)$		$e-2$	$-\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		0	
$h(x)$		0	13



Chapitre logarithme

5. $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

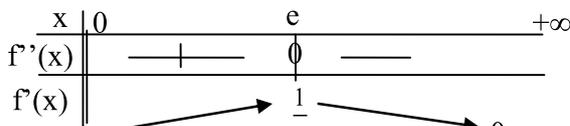
Exercice N°7 :

1. $f'(x) = \frac{\ln x}{x} \forall x > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\ln^2(x)}{x} = 0$

Donc C_f admet une branche parabolique de direction $(0, \vec{i})$.

2.a) f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$1 - \ln x \geq 0$ équivaut à $1 \geq \ln x$ équivaut à $0 < x \leq e$.



a) f est dérivable sur $[e, +\infty[$ et $\forall x \geq e$ implique $x-1 \geq e$ alors il existe un réel $c \in]x, x+1[$ tel que :

$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c) \forall e \leq x \leq c \leq 1+x$ comme f' est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$

alors : $f'(1+x) \leq f'(c) \leq f'(x)$ équivaut à $\frac{\ln(1+x)}{x+1} \leq f'(c) \leq \frac{\ln x}{x}$ d'où $\frac{\ln(1+x)}{x+1} \leq f(x+1) - f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

c) $\sum_{k=3}^{k=n} \frac{\ln(1+k)}{1+k} \leq \sum_{k=3}^{k=n} [f(k+1) - f(k)] \leq \sum_{k=3}^{k=n} \frac{\ln k}{k}$ or

$\sum_{k=3}^{k=n} [f(k+1) - f(k)] = f(4) - f(3) + f(5) - f(4) + \dots + f(n+1) - f(n) = f(n+1) - f(3)$ donc

$f(n+1) - f(3) \leq \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \dots + \frac{\ln(n)}{n}$ alors $f(n+1) - f(3) \leq U_n - \frac{\ln 2}{2}$ équivaut à $f(n+1) - f(3) + \frac{\ln 2}{2} \leq U_n$ or

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

Exercice N°8 :

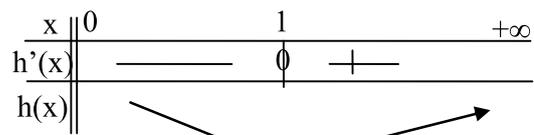
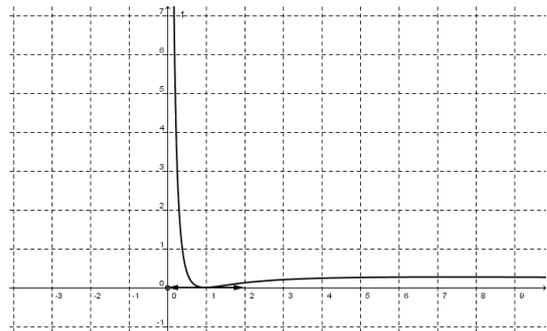
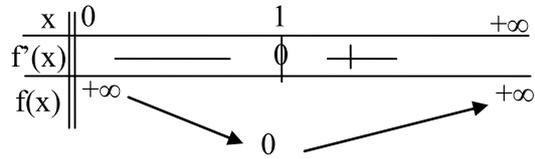
1.a) h est dérivable sur $]0, +\infty[$, $h'(x) = \ln x$; d'après le tableau de variation h admet 0 comme minimum absolue sur $]0, +\infty[$ donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

b) $1 < \frac{x \ln x}{x-1} < 1 + \ln x \forall x > 1 \Leftrightarrow x-1 < x \ln x < (x-1)(1 + \ln x) \forall x > 1$

$\Leftrightarrow x-1 < x \ln x$ et $x \ln x < x + x \ln x - 1 - \ln x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + x \ln x > 0 & (a) \\ x - 1 - \ln x > 0 & (b) \end{cases} \forall x > 1$ d'après 1)a- on a

$h(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x + x \ln x > 0 \forall x > 1$ donc (a) est vraie. On pose $g(x) = x - 1 - \ln x$ pour $x > 1$ g est

dérivable $\forall x > 1$ et $g'(x) = \frac{x-1}{x} > 0 \forall x > 1$ donc g est strictement croissante $]1, +\infty[$ alors pour tout $x > 1$, on a $g(x) > g(1) = 0$ d'où (b) est vraie.



Chapitre logarithme

2. On a $1 < \frac{x \ln x}{x-1} < 1 + \ln x \quad \forall x > 1$. En posant $x = 1 + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ alors $k > 1$ d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : 1 < \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\frac{k+1}{k} - 1} < 1 + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \text{ donc } \forall k \in \mathbb{N}^* : 1 < (k+1) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) < 1 + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

3. On a $\forall k \in \mathbb{N}^* : 1 < (k+1) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) < 1 + \ln(k+1) - \ln k$ alors :

<p>pour $k = 1$: $1 < 2 \ln 2 < 1 + \ln 2 - \ln 1$</p> <p>pour $k = 2$: $1 < 3 \ln \frac{3}{2} < 1 + \ln 3 - \ln 2$</p> <p>pour $k = 3$: $1 < 3 \ln \frac{4}{3} < 1 + \ln 4 - \ln 3$</p> <p>.....</p> <p>pour $k = n$: $1 < (n+1) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 + \ln(n+1) - \ln(n)$</p>	<p style="text-align: center;">on somme membre à membre on trouve :</p> $\left\{ \begin{array}{l} n < \sum_{k=1}^n (k+1) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) < n + \ln(n+1) \text{ équivaut à} \\ 1 < U_n < 1 + \frac{\ln(1+n)}{n} \text{ équivaut à} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln(1+n)}{n}\right] \\ \text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n} \cdot \frac{1+n}{n} = 0 \end{array} \right.$
--	--

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

Exercice N°9: 1.a) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} - \frac{t^n}{1+t} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} (t-1) dt$ or pour tout $t \in [0; 1]$ la

fonction : $t \mapsto \frac{t^n}{1+t} (t-1)$ est continue et négative. Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

b) $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq t+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$ or $t > 0$ alors $t^n > 0$ donc $\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ comme les trois fonctions :

$$t \mapsto \frac{t^n}{2}; t \mapsto \frac{t^n}{1+t} \text{ et } t \mapsto t^n \text{ sont continues sur } [0; 1] \text{ alors } \int_0^1 \frac{t^n}{2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

2. $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} + \frac{t^n}{1+t} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} (t+1) dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$

3.a) $k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$

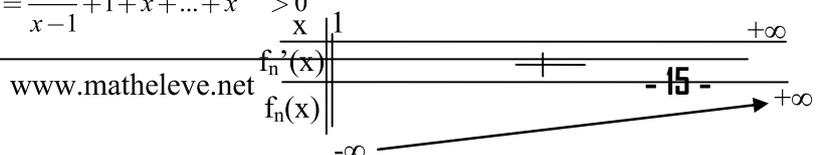
b) $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \Rightarrow \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow [\ln x]_1^{n+1} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \Rightarrow \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = +\infty$$

4) $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_k$ d'après 1-b) on a : $\frac{1}{2(k+1)} \leq I_k \leq \frac{1}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2(k+1)} \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} I_k \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{k+1}$ or d'après 3-a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty .$$

Exercice N°10: $f_n'(x) = \frac{1}{x-1} + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{1}{x-1} + 1 + x + \dots + x^{n-1} > 0$



Chapitre logarithme

1. f_n est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $f_n(]1, +\infty[)$ et comme

$0 \in f_n(]1, +\infty[)$ alors il existe un unique $\alpha_n \in]1, +\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.

2.a) $f_{n+1}(x) = \ln(x-1) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$ d'où $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n - 1) + \alpha_n + \underbrace{\frac{\alpha_n^2}{2} + \frac{\alpha_n^3}{3} \dots + \frac{\alpha_n^n}{n}}_{f_n(\alpha_n)} + \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}$ alors :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1} = 0 + \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1} = \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}.$$

b) On a $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} > 0 \Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leq f_{n+1}(\alpha_n)$, comme f_{n+1} est une fonction croissante sur $]1, +\infty[$ alors $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ donc (α_n) est suite décroissante et elle est minorée par 1 alors (α_n) est une suite convergente.

Exercice N°11: 1.a) φ est dérivable sur $]0, +\infty[$. (somme des fonctions dérivables) on a :

$$\forall x \geq 0; \varphi'(x) = 2 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2} > 0 \text{ d'où } \varphi \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.$$

b) Comme φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors $\forall x > 0; \varphi(x) > \varphi(0) = 0$

2.a) La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0; 1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est continue sur

$]0, +\infty[$. De plus la fonction : $x \mapsto x^2$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est continue

sur $]0, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 \ln(x+1) - x \ln x] = 0 = f(0) \Rightarrow f$ est continue en 0. **Conclusion :** f est continue sur $]0, +\infty[$.

b) La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0; 1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur

$]0, +\infty[$ De plus la fonction : $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable

sur $]0, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x+1) - x \ln x] = 0 \Rightarrow f$ est dérivable à droite en 0. **Conclusion :**

f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

c) On a : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 2x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}} = x \cdot \frac{2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + 1}}{x} = x \cdot \frac{2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1}}{x} = x \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\forall x > 0$ on a $\frac{1}{x} > 0$ alors $\forall x > 0$ on a $\varphi(x) > 0$ et par suite $\forall x > 0$ on a $f'(x) = x \varphi\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{pose } X = \frac{1}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{X} \cdot \frac{\ln(1+X)}{X} \right] = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ Comme f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ alors f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

1.a) Soit $t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0, t],$ on a : $\frac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{1+x} dx \leq \int_0^t 1 dx \Leftrightarrow \ln(1+t) \leq t$



Chapitre logarithme

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = x^2 \underbrace{\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right]}_{<0 \text{ d'après la question 3-a)}}$ donc $f(x) - x < 0$. **Conclusion** : C_f est au dessous de (D)

2.a) $1-t - \frac{1}{1+t} = \frac{1-t^2-1}{1+t} = \frac{-t^2}{1+t} \leq 0$ et on a : $\frac{1}{1+t} - (1-t+t^2) = \frac{-t^3}{1+t} \leq 0 \forall t \in [0, +\infty[$. Donc $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \forall t \in [0, +\infty[$.

b) les fonctions : $t \mapsto 1-t$; $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto 1-t+t^2$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$ on a :

$$\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

c) on a : $\forall x > 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

or $x^2 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$ donc: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

3.a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] \stackrel{\substack{\text{on pose } X = \frac{1}{x} \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0^+}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1+X) - \frac{1}{X} + \frac{1}{2}}{X^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\ln(1+X) - X}{X^2}}_{=-\frac{1}{2} \text{ D'après la question 3-c)}} + \frac{1}{2} = 0.$

Ce qui interprète que C_f admet la droite $\Delta : y = x - \frac{1}{2}$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

b) $\forall x > 0; f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{h\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} > 0$ avec $h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ d'après la question 4-a)

et $f(0) - \left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ d'où C_f est au-dessus de Δ .

b) voir figure.
c)

4.a) $A_\lambda = \int_\lambda^1 |f(x)| dx = \int_\lambda^1 f(x) dx$ car $f(x) > 0 \forall x \in [\lambda, 1]$

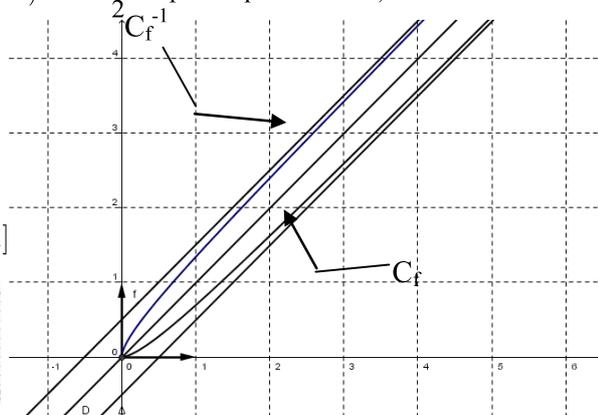
$$= \int_\lambda^1 x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \quad \left(\begin{array}{l} u'(x) = x^2 \Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ v(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow v'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} \end{array} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \left(\frac{-1}{x(x+1)} \right) dx = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} \int_\lambda^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} [h(x)]_\lambda^1$$

(car $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$ est la primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ de la fonction $\left(x \mapsto \frac{x^2}{1+x}\right)$ qui s'annule en 0) donc

$$A_\lambda = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} [h(1) - h(\lambda)] = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{\lambda^2}{2} + \lambda - \ln(1+\lambda) \right]$$

$$A_\lambda = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{3} \ln(1+\lambda) - \frac{1}{6} \lambda^2 + \frac{1}{3} \lambda \text{ et}$$



Chapitre logarithme

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{3} \ln(1 + \lambda) - \frac{1}{6} \lambda^2 + \frac{1}{3} \lambda \right] = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^3 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda f'(\lambda) = 0$$

b) $C_{f^{-1}} = S_D(C_f); (y'Oy = S_D[(x'Ox)])$ et $(D_1 : y = 1) = S_D(D_1 : x = 1)$ et comme S_D est une isométrie alors elle conserve les distances par conséquent elle conserve les aires. Donc $Aire(D'') = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A_\lambda = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}$.

Exercice N°12: A-1 a) $A(1;1) \in C_f$ équivaut à $f(1) = 1$. et on a

$$A \in T \text{ et } B(3;0) \in T \text{ donc } f'(1) = \frac{0-1}{3-1} = -\frac{1}{2}$$

b) voir le tableau :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	—
$f(x)$	$+\infty$	0

$$2. \text{ on a } f(1) = 1 \text{ et } f \text{ est continue en } 1 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{a + \ln(1)}{1+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{a+0}{1+b} = 1 \Leftrightarrow a = 1+b$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{x+b}{x} - \ln x}{(x+b)^2} \text{ alors } f'(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+b-a = -\frac{1}{2}(1+b)^2 \text{ donc on}$$

$$a : \begin{cases} 1+b-a = -\frac{1}{2}(1+b)^2 \\ a = 1+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1+b \\ 1+b-1-b = 0 = -\frac{1}{2}(1+b)^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}$$

1. a) f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* $\Rightarrow f$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^* = J$.

b) $f(1) = 1$ et $f'(1) = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable en et on a $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(1)} = -2$

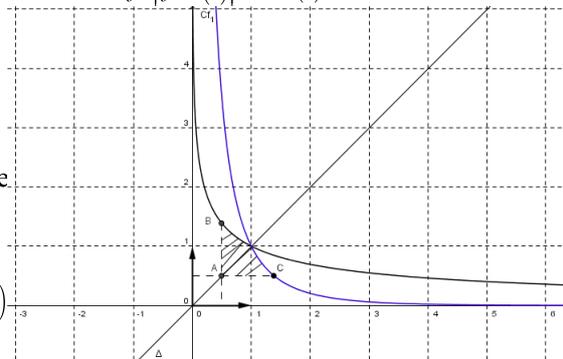
d'où $T' : y = (f^{-1})'(1)(x-1) + f^{-1}(1) = -2x + 3$.

c) $C_{f^{-1}} = S_\Delta(C_f)$ avec S_Δ est la symétrie orthogonale

d'axe $\Delta : y = x$ (voir figure)

4. $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ avec D_1 et D_2 sont les domaines limités respectivement :

$$\begin{cases} C_f \\ [AB] \\ [AH] \text{ avec } H(1;1) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} C_{f^{-1}} \\ [AC] \\ [AH] \text{ avec } H(1;1) \end{cases} \text{ comme } C_{f^{-1}} = S_\Delta(C_f)$$



S_Δ est une isométrie alors l'aire est de D_1 est égale à D_2 . d'où $Aire(D) = A = 2Aire(D_1) =$

$$2 \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) - x) dx \right] = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \left[x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \frac{3}{4}$$

B- 1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $\sum_{k=0}^{k=n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{k=n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a :

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{k=0}^{k=n} x^k \ln x + \frac{x^{n+1} \ln x}{1-x} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \text{ on a : } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sum_{k=0}^{k=n} x^k \ln x + \frac{x^{n+1} \ln x}{1-x} \right) dx \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \text{ on a :}$$

$$-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{k=n} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^k \ln x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) dx \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \text{ on a : } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -\sum_{k=0}^{k=n} u_k - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) dx$$



$$3. u_n = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^n \ln x \, dx \quad \left[\begin{array}{l} u'(x) = x^n \Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right] \text{ donc : } u_n = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{n+1} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^n \, dx$$

$$= -\frac{\ln \frac{1}{2}}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} . \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1, 1[\text{ alors :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 0$$

$$4. \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ on a : } f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (car } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \text{)} \Leftrightarrow \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ on a : } 1 \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ on a : } x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1} \ln x}{x-1} \leq 2 \ln 2 \cdot x^{n+1} .$$

$$5. \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ on a : } x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1} \ln x}{x-1} \leq 2 \ln 2 \cdot x^{n+1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} \, dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{n+1} \ln x}{x-1} \, dx \leq 2 \ln 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} \, dx$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) \, dx \leq 2 \ln 2 \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \frac{1}{n+2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right] \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) \, dx \leq \frac{2 \ln 2}{n+2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right] \text{ de plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 0$$

Donc, d'après un théorème de limite et ordre, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) \, dx = 0$

$$6. \forall n \in \mathbb{N}; \text{ on a : } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) \, dx = -\sum_{k=0}^{k=n} u_k - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) \, dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) \, dx = -\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} u_k - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{n+1} f(x) \, dx \text{ ainsi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=0}^{k=n} -u_k \right] = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) \, dx$$

Exercice N°13:A- 1.a) $g : x \mapsto \left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} \right] x^2 - \ln(1+x) + x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ (on remarque que la variable de g

est x). Ainsi g est continue sur $[0, h]$ et dérivable sur $]0, h[$. \Rightarrow il existe un réel $c \in]0, h[$ tel que : $g'(c) = \frac{g(h) - g(0)}{h - 0}$ or $g(h)$

$$= 0 \text{ et } g(0) = 0 \text{ d'où } g'(c) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} \right] 2c - \frac{1}{1+c} + 1 = 0 \left(\text{car } g(x) = \left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} \right] 2x - \frac{1}{x+1} + 1 \right) \text{ donc}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{1}{2c(1+c)} \Leftrightarrow \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{-1}{2(1+c)} .$$

$$b) 0 < c < h \Leftrightarrow 1 < c+1 < 1+h \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+h} \Leftrightarrow \frac{-1}{2(1+h)} < \frac{-1}{2(c+1)} > -\frac{1}{2} \text{ or } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2(1+h)} = -\frac{1}{2} \text{ alors}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = -\frac{1}{2}$$

Chapitre logarithme

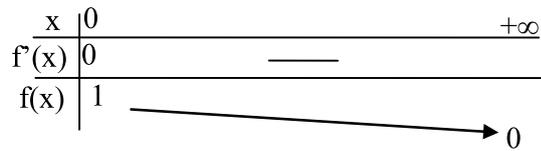
$$c) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1+h) - 1}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = -\frac{1}{2}. \text{ 2.a) Soit}$$

$$x \geq 0 \forall t \in [0, x]: 1+t \geq 1 \Leftrightarrow \forall t \in [0, x]: (1+t)^2 \geq 1+t \Leftrightarrow \forall t \in [0, x]: \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \text{ et par suite : } \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt.$$

$$b) \text{ Soit } x \geq 0 \text{ on a : } \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \Leftrightarrow -\frac{1}{x+1} + 1 \leq \ln(1+x) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0.$$

c) la fonction : $x \mapsto 1+x$ est dérivable et strictement positive sur \mathbb{R}_+ . Et par suite f est dérivable sur \mathbb{R}_+ .



$$\forall x > 0; f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{1+x} - 1 \cdot \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0 \text{ D'après la question A-2-b).}$$

3. Voir tableau de variation et la courbe.

$$B-1. \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n = \int_0^a t^{n+1} f(t) dt - \int_0^a t^n f(t) dt = \int_0^a t^n f(t) \cdot (t-1) dt$$

Or $\forall t \in [0, a] \subset [0, 1]$ on a : $t^n \geq 0; f(t) \geq 0$ et $t-1 \leq 0 \Rightarrow$

$$\forall t \in [0, a] \text{ on a : } t^n f(t) (t-1) \leq 0 \text{ et par suite } \int_0^a t^n f(t) (t-1) dt \leq 0 \Rightarrow$$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est une suite décroissante.

2.a) $\forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in [0, a]$ on a : $t^n \geq 0; f(t) \geq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: t^n f(t) \geq 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: u_n = \int_0^a t^n f(t) dt \geq 0$. Donc (u_n) est minorée par 0 de plus (u_n) est décroissante donc (u_n) est convergente.

3.a) f est décroissante sur \mathbb{R}_+ donc : pour tout réel $x \geq 0, f(x) \leq f(0) = 1$.

$$b) \forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in [0, a]: f(t) \leq 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in [0, a]: t^n f(t) \leq t^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \int_0^a t^n f(t) dt \leq \int_0^a t^n dt \quad \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^a$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; u_n \leq \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad c) \forall n \in \mathbb{N}; u_n \leq \frac{a^{n+1}}{n+1} \text{ de plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = 0 \text{ car } a \in]0, 1[\text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice N°14: 1.a) $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq x+1 \leq 2$ donc $0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$ d'où $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq \ln(2) \cdot x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx \Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \text{ comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

$$b) \bullet \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

$$\bullet U_1 = \int_0^1 x \ln(1+x) dx \text{ posons : } \begin{cases} u(x) = \ln(1+x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v'(x) = x \Leftarrow v(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{cases} \text{ donc } U_1 = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = \frac{1}{4}.$$



2.a) $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-x)^k$ est la somme de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison $q = -x \neq 1$. Alors

$$S_n = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

D'une part on a : $\int_0^1 S_n dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx$

$$= [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

d'autre part : $\int_0^1 (1-x+x^2+\dots+(-1)^n x^n) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = V_n$$

d'où $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b) $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq x+1 \leq 2$ d'où $1 \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x^{n+1} \geq \frac{x^{n+1}}{x+1} \geq \frac{x^{n+1}}{2}$ on aura alors :

$$|V_n - \ln 2| = \left| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$$

comme $\int_0^1 x^{n+1} dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$ d'où $|V_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2.$$

3.a) $\left(\begin{array}{l} f'(x) = x^n \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ g(x) = \ln(1+x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x} \end{array} \right)$ alors : $U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \frac{1}{n+1} \ln 2 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

comme $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ alors $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \frac{V_n - \ln 2}{(-1)^n}$ Ainsi

$$U_n = \frac{1}{n+1} \ln 2 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{V_n - \ln 2}{(-1)^n} \right) = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\ln 2 - V_n)$$

b) $W_n = (n+1)U_n = \ln 2 + (-1)^n (\ln 2 - V_n) \Rightarrow W_n - \ln 2 = (-1)^n (\ln 2 - V_n) \Rightarrow |W_n - \ln 2| = |\ln 2 - V_n|$ comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |V_n - \ln 2| = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |W_n - \ln 2| = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \ln 2$ donc W est une suite convergente.

Exercice N°15: 1. on a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1-2 \ln x)}{x^4} = \frac{1-2 \ln x}{x^3}$ or : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \ln x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} > x$ donc f est strictement croissante sur $]0, \sqrt{e}[$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

2.a) Comme $\sqrt{e} < 2$, la fonction f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. On a donc : $k \leq x \leq k+1 \Rightarrow$

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \text{ soit : } \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \frac{\ln(x)}{x^2} \leq \frac{\ln(k)}{k^2} (k \geq 2) \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k^2} dx$$

$$\text{soit } \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \frac{\ln(k)}{k^2} \int_k^{k+1} dx \text{ ou encore : } \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \frac{\ln(k)}{k^2}.$$

b) $\int_a^b \frac{1}{x^2} \ln x dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_a^b - \left[\frac{1}{x} \right]_a^b = \left[-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right]_a^b.$

3) a) En donnant successivement à k les valeurs $2; 3; 4; \dots; n-1$ on obtient $(n-2)$ inégalités doubles ; ajoutons-les

membre à membre on obtient : $\sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=2}^{k=n-1} \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{\ln(k)}{k^2}$. La première somme s'écrit :

$\frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln(n)}{n^2} = S_n - \frac{\ln 2}{2^2}$. Le second membre s'écrit :

$\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x^2} dx + \int_3^4 \frac{\ln(x)}{x^2} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \int_2^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ La troisième somme s'écrit :

$\frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \dots + \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2} = S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$ d'où on a bien l'encadrement : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$

b) La première inégalité s'écrit : $S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} \right]_2^n$ d'après 2.b) soit : $S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$ ou encore :

$S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$. La deuxième inégalité s'écrit : $S_n \geq \frac{\ln(n)}{n^2} + \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} \right]_2^n$ soit :

$S_n \geq \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$ ou encore : $S_n \geq \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+n\ln(n)-\ln(n)}{n^2}$ d'où on trouve l'encadrement demandé.

c) on a : $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{100+99\ln(100)}{100^2} \leq S_{100} \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(100)}{100}$ on obtient avec la calculatrice : $0,79 \leq S_{100} \leq 0,97$.

Exercice N°16: 1.a) $I_1 = \frac{1}{1!} \int_1^2 \frac{(\ln x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ soit $\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \Leftarrow v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \left[-\frac{1}{x} \cdot \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}.$$

b) $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx - \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = \frac{1}{n!} \left[\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} \left(\frac{\ln x}{n+1} - 1 \right) dx \right]$ or on a :

$x \in [1; 2] \Rightarrow \ln x \geq 0$ et $x > 0$ donc $\frac{(\ln x)^n}{x^2} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$, d'autre part: $x \leq 2 < e \Rightarrow \ln x < \ln e = 1$ et comme

$\frac{1}{n+1} < 1 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{\ln x}{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{n+1} - 1 < 0$ donc $\frac{(\ln x)^n}{x^2} \left(\frac{\ln x}{n+1} - 1 \right) < 0$ et par suite $I_{n+1} - I_n \leq 0$ alors (I_n) est une suite

décroissante. On a $\forall x \in [1; 2], \forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{(\ln x)^n}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \geq 0 \Rightarrow (I_n)$ est une suite décroissante et minorée par 0 donc (I_n) est une suite convergente.

c) On a : $\forall x \in [1; 2] \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 2$ car $\ln \nearrow \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq (\ln 2)^n \Rightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{(\ln 2)^n}{x^2}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \int_1^2 \frac{(\ln 2)^n}{x^2} dx$ or : $\int_1^2 \frac{(\ln 2)^n}{x^2} dx = (\ln 2)^n \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = (\ln 2)^n \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^n}{2}$ donc

$\Rightarrow 0 \leq \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \frac{(\ln 2)^n}{2} \leq (\ln 2)^n \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ d'où $I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$. Et

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$ car $(\ln 2)^n$ est une suite géométrique de raison : $0 < \ln(2) < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Chapitre logarithme

2.a) $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx$ On pose : $\left[\begin{array}{l} u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1) \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^n \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \Leftarrow v(x) = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[\left[-\frac{1}{x} (\ln x)^{n+1} \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x} \cdot \frac{n+1}{x} (\ln x)^n dx \right] = \frac{1}{(n+1)!} \left[-\frac{1}{2} (\ln 2)^{n+1} + (n+1) \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \right]$$

$$= -\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+1)!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx - \frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!} = I_n - \frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}$$

b) Par récurrence : pour $n = 1$, $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} \right)$ la propriété est vraie. Supposons que :

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right), \text{ montrons que : } I_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} + \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} \right). \text{ Or on a :}$$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right) - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} + \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \text{ donc : } \forall n \in \mathbb{N}^* : I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right).$$

3.a) $u_n = 1 + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{(\ln 2)^2}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!} \Leftrightarrow u_n \cdot \ln 2 = \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ on aura : $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} u_n \cdot \ln 2$ donc

$$u_n = \frac{1 - 2I_n}{\ln 2} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2I_n}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Exercice N°17: I-1) les variations de g sur $]0; 1]$. $g'(x) = -2 + \frac{1}{x} = \frac{-2x+1}{x}$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $(-2x+1)$

car $x > 0$. On a : $g'(x) = 0 \Rightarrow -2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - 2x + \ln x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$

2) g est continue et strictement croissante sur $\left] 0, \frac{1}{2} \right]$ donc $g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{sur } \left] 0, \frac{1}{2} \right[\\ = 0 & \text{en } x = \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{sur } \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\end{cases}$

elle réalise une bijection de $\left] 0, \frac{1}{2} \right]$ sur $]-\infty, 1 - \ln 2]$ comme $0 \in]-\infty, 1 - \ln 2]$ alors $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

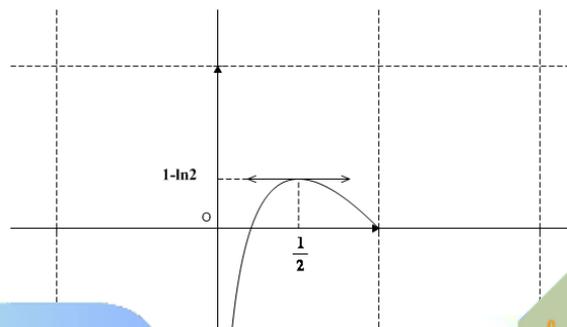
Soit $t \in]0, \alpha]$ comme g est croissante alors $g(t) \leq g(\alpha)$ donc $g(t) \leq 0$. Si $t \in \left[\alpha, \frac{1}{2} \right] \Rightarrow g(\alpha) \leq g(t) \Rightarrow g(t) \geq 0$. Sur

$$\left[\frac{1}{2}, 1 \right] g(t) \text{ admet } 0 \text{ comme minimum absolue donc } g(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] : g(t) \geq 0 \Rightarrow 2 - 2t + \ln t \geq 0 \Leftrightarrow -\ln t \leq 2 - 2t.$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ alors (C_g) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc (C_g) admet une tangente horizontale en $\left(\frac{1}{2}, 1 - \ln 2\right)$.

4) Donc l'aire $A = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x) dx \right) 4^2 \text{ cm}^2$

www.matheleve.ne



Chapitre logarithme

$$= [2t - t^2 + t \ln t - t]_{\frac{1}{2}}^1 \times 4^2 \text{ cm}^2 = \left(-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) \times 16 \text{ cm}^2.$$

II- 1) la fonction : $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0; 1[$

donc elle admet au moins une primitive G sur $]0, \frac{1}{2}[$. La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ et

$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow 2x \in]0; 1[\subset]0; 1[$. Donc la fonction : $x \mapsto G(2x)$ est dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ comme composée de deux fonctions.

Alors F est dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ et on a : $F'(x) = (2x)'G'(2x) - (x)'G'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2 \ln x - \ln 2x}{\ln(2x)\ln(x)}$

$$= \frac{\ln \frac{x^2}{2x}}{\ln(2x)\ln(x)} = \frac{\ln \frac{x}{2}}{\ln(2x)\ln(x)}.$$

2) $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$. $x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow \ln x \leq \ln t \leq \ln 2x$ comme $2x < 1$ c-à-d $\ln 2x < 0$ alors $\frac{1}{\ln 2x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}$. Or les fonctions :

$$\left. \begin{array}{l} t \mapsto \frac{1}{\ln t} \\ t \mapsto \frac{1}{\ln x} \\ t \mapsto \frac{1}{\ln 2x} \end{array} \right\} \text{ sont continues sur }]0, \frac{1}{2}[\text{ on aura : } \int_x^{2x} \frac{1}{\ln 2x} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln x} dt \Leftrightarrow \frac{2x-x}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \leq \frac{2x-x}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\ln 2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln 2x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln 2x} = \frac{0}{\infty} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{\infty} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0.$$

3) $F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$. D'après I-1) : $2t - 2 \leq \ln t$. Les fonctions : $t \mapsto 2t - 2$ et $t \mapsto \ln t$ sont continues sur $]\alpha, \frac{1}{2}[$ donc :

$$\frac{1}{2t-2} \geq \frac{1}{\ln t} \Leftrightarrow \frac{1}{2t-2} \geq \frac{1}{\ln t} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt \geq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \Leftrightarrow F(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt \Rightarrow F(x) \leq [\ln(|t-1|)]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq \frac{1}{2} [\ln(|2x-1|) - \ln(|x-1|)] \text{ comme } x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 < 0 \text{ et } 2x-1 < 0 \text{ donc : } |x-1| = -x+1 \text{ et } |2x-1| = -2x+1$$

$$\text{donc : } F(x) \leq \frac{1}{2} [\ln(1-2x) - \ln(1-x)] \text{ or : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 1-2x = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \ln(1-2x) = -\infty \text{ et par suite } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} F(x) = -\infty.$$

4) Le tableau de variation de F : $F'(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{\ln(2x)\ln(x)} \forall x \in]0, \frac{1}{2}[\Rightarrow \frac{x}{2} \in]0, \frac{1}{4}[\Rightarrow \ln \frac{x}{2} < 0$. $\ln(x) < 0; x \in]0; 1[$

et $\ln 2x < 0$ donc : $F'(x) \leq 0 \forall x \in]0, \frac{1}{2}[$

x	0	$\frac{1}{2}$
$F'(x)$	—	—
$F(x)$	0	$-\infty$

5) $1 + nF(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = -\frac{1}{n}$ comme F est continue et

strictement croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ donc elle réalise une bijection de $]0, \frac{1}{2}[$ sur $F\left(]0, \frac{1}{2}[\right) =]-\infty, 0[$ comme $\left(-\frac{1}{n}\right) \in]-\infty, 0[$ donc

il existe un unique $\alpha_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que : $F(\alpha_n) = -\frac{1}{n}$ On a $1+n > n \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{1+n} \Leftrightarrow -\frac{1}{1+n} > -\frac{1}{n} \Rightarrow F(\alpha_{n+1}) > F(\alpha_n)$.



Chapitre logarithme

Comme F est décroissante sur $]0; \frac{1}{2}[$ donc $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ alors (α_n) est suite décroissante et comme elle est minorée par 0 donc (α_n) est convergente.

Exercice N°18 : 1-a) On a : $I_1 = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t)] dt$

on pose : $\left(\begin{array}{l} f(t) = \ln t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} \\ g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftarrow g(t) = 2\sqrt{t} \end{array} \right)$ alors: $I_1 = [2\sqrt{t} \cdot \ln t]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} 2\sqrt{t} dt$

$$= 2\sqrt{e} - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{e} - 2[2\sqrt{t}]_1^e = -2\sqrt{e} + 4$$

b) $I_{n+1} = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t)]^{n+1} dt$ on pose $\left(\begin{array}{l} u(t) = [\ln t]^{n+1} \Rightarrow u'(t) = \frac{n+1}{t} (\ln t)^n \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftarrow v(t) = 2\sqrt{t} \end{array} \right)$

$$\Rightarrow I_{n+1} = [(\ln t)^{n+1} 2\sqrt{t}]_1^e - \int_1^e (n+1) [\ln(t)]^n \cdot 2\sqrt{t} dt \quad I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1) \underbrace{\int_1^e [\ln(t)]^n \cdot \sqrt{t} dt}_{I_n} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n.$$

c) $I_2 = 2\sqrt{e} - 2 \times 2I_1 = 2\sqrt{e} - 4(4 - 2\sqrt{e}) = 10\sqrt{e} - 16$. $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t) - 1]^2 dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [(\ln(t))^2 - 2\ln t + 1] dt$

$$= \int_1^e \left[\frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{\sqrt{t}} \ln t + \frac{1}{\sqrt{t}} \right] dt = \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} dt - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{t}} \ln t dt + \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} dt = I_2 - 2I_1 + [2\sqrt{t}]_1^e$$

$$= 10\sqrt{e} - 16 - 2(4 - 2\sqrt{e}) + 2\sqrt{e} - 2 = 16\sqrt{e} - 26$$

2-a) On a $1 \leq t \leq e \Leftrightarrow \ln 1 = 0 \leq \ln t \leq \ln(e) = 1 \Leftrightarrow 0 \leq [\ln(t)]^n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{[\ln(t)]^n}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} dt \Rightarrow 0 \leq I_n \leq [2\sqrt{t}]_1^e \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq 2\sqrt{e} - 2 < \frac{3}{2} \text{ donc } 0 \leq I_n \leq \frac{3}{2}.$$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e \left[\frac{1}{\sqrt{t}} (\ln(t))^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{t}} (\ln(t))^n \right] dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} (\ln(t))^n [\ln(t) - 1] dt$ on a :

$\forall t \in [1, e] : \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t)]^n \geq 0$ et $0 \leq \ln t \leq 1$ d'où $\ln(t) - 1 \leq 0$. alors d'où $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et par suite I_n est décroissante, or I_n est minorée par 0 alors elle est convergente.



Chapitre logarithme

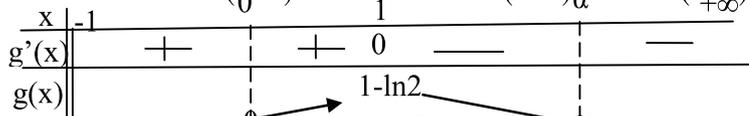
3-a) on a I_n est décroissante alors $I_{n+1} \leq I_n \Leftrightarrow 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n \leq I_n \Leftrightarrow 2\sqrt{e} \leq (2n+3)I_n \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \leq I_n$ d'autre part, on

a) $I_n \leq I_{n-1}$ et on a : $I_n = 2\sqrt{e} - 2nI_{n-1} \Leftrightarrow I_{n-1} = \frac{2\sqrt{e} - I_n}{2n}$ d'où : $I_n \leq \frac{2\sqrt{e} - I_n}{2n} \Leftrightarrow$

$I_n + \frac{I_n}{2n} \leq \frac{2\sqrt{e}}{2n} \Leftrightarrow I_n \leq \frac{2\sqrt{e}}{2n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}$ donc $I_n \leq \frac{2\sqrt{e}}{2n+1}$ finalement : $\frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \leq I_n \leq \frac{2\sqrt{e}}{2n+1}$.

b) $\frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \leq I_n \leq \frac{2\sqrt{e}}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{n \cdot 2\sqrt{e}}{2n+3} \leq n \cdot I_n \leq \frac{n \cdot 2\sqrt{e}}{2n+1}$ comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot 2\sqrt{e}}{2n+3} = \sqrt{e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot 2\sqrt{e}}{2n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sqrt{e}$.

Exercice N°19 : I-1) $g'(x) = \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2 + 2x - 2x - 1 - x}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{(1+x)^2}$



$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{2(y-1)}{y} - \ln(y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} [2y - 2 - y \ln(y)] = -\infty$ car si on

pose : $y = 1+x$, si $x \rightarrow (-1)^+$; $y \rightarrow 0^+$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = 2 - \infty = -\infty$

2) d'après le tableau de variation, g s'annule deux fois et on a $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$ et $g(3,8) = 0,01$ et $g(4) = -0,009$ comme $g(3,8) \times g(4) < 0$ et g continue et strictement décroissante sur $]3,8 ; 4[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : $3,8 < \alpha < 4$.

3) $g(x) \leq 0$ sur $]-1, 0]$ / $g(x) \geq 0$ sur $[0, \alpha]$ / $g(x) \leq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$.

4) D'après le tableau de variation, g admet un maximum est égale à $1 - \ln 2 < 1$ d'où $g(x) \leq 1$.

II- 1) Les fonctions : $x \mapsto \ln(x+1)$ } sont continues sur $]0, +\infty[$ don f est continue sur $]0, +\infty[$.
 $x \mapsto \sqrt{x}$ }

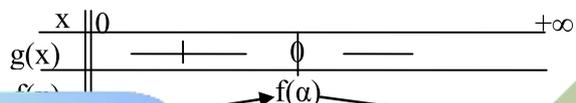
Continuité de f en 0^+ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{x}$. On pose : $y = 1+x$, $x \rightarrow 0, y \rightarrow 1$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln(y)}{y-1} = 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 \times 1 = 0 = f(0)$. Don f est continue à droite en 0.

2) **Dérivabilité en 0^+ :** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = +\infty \times 1 = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite de 0.

3) Les fonctions : $x \mapsto \ln(1+x)$ } sont dérivables sur $]0, +\infty[$ d'où f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Et
 $x \mapsto \sqrt{x}$ }

$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1+x)}{\sqrt{x}^2} = \frac{2x - (1+x) \cdot \ln(1+x)}{2\sqrt{x}(1+x)x} = \frac{2x - (1+x) \ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(\frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \right) \cdot \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.



$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)x\right]}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right] = 0 \quad f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{or} \quad g(\alpha) = 0 = \frac{2\alpha}{1+\alpha} - \ln(1+\alpha) \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

$$\text{donc } f(\alpha) = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

$$\text{III-1) D'après I-4) on a : } g(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x} - \ln(x+1) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x} - 1 \leq \ln(x+1) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \leq \ln(x+1).$$

$$2) \text{a) On a : } \frac{x-1}{x+1} \leq \ln(x+1) \text{ on pose : } x = 1 + \frac{k}{n} \text{ on aura : } \ln\left(1 + 1 + \frac{k}{n}\right) \geq \frac{1 + \frac{k}{n} - 1}{1 + 1 + \frac{k}{n}} \Leftrightarrow \ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) \geq \frac{k}{2n+k}$$

$$\text{or } 2n+k \leq 3n \text{ donc } \frac{1}{2n+k} \geq \frac{1}{3n} \text{ et } k \text{ est positif } \frac{k}{2n+k} \geq \frac{k}{3n} \text{ d'où : } \ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) \geq \frac{k}{3n}.$$

$$\text{c) On a : } \ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) \geq \frac{k}{3n} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{3n} \Leftrightarrow \ln(u_n) \geq \frac{1}{3n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow \ln(u_n) \geq \frac{n+1}{6}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{6} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = +\infty \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$