Trouver deux réels a et b tels que $\forall\ x \in IR\backslash\{1,-1\}$ on a : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$

En déduire la primitive F de la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x^2}$ telle que $F(0) = 1$

Exercice 1 : vrai ou faux

1) Pour tous réel a et b tels que $ab > 0$, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
2) L'écriture $\ln(-x)$ n'a pas de sens.
3) La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2+x+3)$ est définie sur IR.
4) La fonction $f : x \mapsto \ln(x+2)^2$ est définie sur IR.
5) $f : x \mapsto \ln\dfrac{(1-x)}{(1+x)}$, définie sur]-1, 1[, est impaire.
6) La fonction $x \mapsto \ln(\ln|x|)$ est définie sur IR^*.
7) Pour tout réel x non nul : $\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) < 0$
8) La courbe d'équation $y = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ admet deux asymptotes
9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^2}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\ln x} = +\infty$
10) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^5 \ln x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x}{\ln x} = +\infty$

Exercice 2 : Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I donné :

a) $f(x) = 2x+1+\dfrac{1}{3x-1}$ $\qquad I = [1, +\infty[$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ $\qquad I = IR$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$ $\qquad I = [4, +\infty[$

d) $f(x) = \tan(x)$ $\qquad I = \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

Exercice 3 :

1) Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$; b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \ln x$ c) $f : x \mapsto \dfrac{-1}{\ln x - 1}$

d) $f : x \mapsto (\ln x)^2 - \ln x$

2) Déterminer la limite en 0 de chacune des fonctions :

a) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$; b) $f : x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^6$

c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$; d) $f : x \mapsto (\ln x)\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$

Exercice 4 : Q.C.M

Dans chacun des cas suivants, choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1) $\ln\dfrac{64}{81}$ est égal à :

a) $2\ln\dfrac{8}{9}$ b) $6\ln 2 + 4\ln 3$

2) $\ln(\sqrt{5}-2) + \ln(\sqrt{5}+2)$ est égal à :

a) $2\ln\sqrt{5}$ b) 0 c) $\ln 9$

3) $\ln x + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est égal à :

a) $\ln\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\ln(1+x)$ c) $\ln\left(\dfrac{1+x}{x^2}\right)$

Exercice 5 : Résoudre dans IR.

a) $\ln(x+1) + \ln(x-2) < 2\ln(3-x)$

b) $\ln(x^2-x-2) < 2\ln(3-x)$

c) $\dfrac{\ln x + 2}{\ln x - 1} < 0$

d) $\ln|x-2| + \ln|x+4| \le 3\ln 2$

Exercice 6 : On considère la suite réelle (u) définie par:

$u_0 = 2$ et pour tout n entier naturel, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$

1) Calculez u_1, u_2 et u_3.
2) Montrez que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e$, où e désigne la base des logarithmes népériens.
3) Calculez u_n en fonction de n .
4) Précisez le sens de variation de la suite (u) et calculez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
5) Déterminez le plus entier n_0 tel que $u_{n_0} > 10$

Problème

PARTIE A : Etude d'une fonction

Soit f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x+1)$.

Sa courbe représentative ζ dans un repère orthogonal.

1) a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe ζ au point O ?

2) calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$

3) A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe ζ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle [0 ; 1].

On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

PARTIE B : Etude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur IN par : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx$ et pour tout n non nul , on a $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$

1) Calculer u_0 et u_1
2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-t-elle ?
3) Démontrer que pour tout entier naturel n ...

...éduire la limite de la sui...

Exercice 0 :

A/Questions indépendantes

1) Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$; $\int_1^2 \frac{-\ln(t)}{t^2}\,dt$; $\int_{e-1}^2 \ln(\frac{1+t}{3-t})\,dt$
2) Calculer la limite de chacune des suites définies par $I_n = \int_1^3 t^n \ln(t)\,dt$ et $J_n = \int_1^2 (t\ln(t))^n\,dt$
3) Calculer chacune des limites suivantes :
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(3x))}{x^2}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3\sqrt[5]{x})}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$
4) Calculer les limites des sommes suivantes :
$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $T_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k\ln(k)}$

B/

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
2) Etudier la dérivabilité de la réciproque g^{-1}. Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
3) Calculer $(g^{-1})'(\ln 2 - \frac{1}{2})$

C/

1) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a :
$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2 .$$
2) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
3) Montrer que la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est dérivable en 0.

D/

f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2-1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 1.

Exercice 1 :

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{x-\ln(x)}$

1) Etudier g et tracer sa courbe C_g dans n repère orthonormé .
2) On se propose de calculer l'aire de la partie du plan limitée par Cg , la droite des abscisses et les droites (x=0) et (x=1)
   a) Montrer que la suite u définie sur IN* par $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t}{t-\ln(t)}\,dt$. est croissante et majorée
   b) En déduire que la suite est convergente vers une limite L telle que $0 < L \leq \frac{1}{2}$
   c) Conclure .
3) On se propose de calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_g , les axes des coordonnées et la droite (x=1).

Soit la suite v définie sur IN par $v_n = \int_1^n \frac{t}{t-\ln(t)}\,dt$
   a) Montrer que pour tout réel $t \geq 1$ on a $\frac{t}{t-\ln(t)} \leq 1 + \ln(t)$
   b) la suite (v_n) est elle convergente ? Conc

Exercice 2 :

A tout entier naturel non nul n on associe la fon f_n définie par $f_n(x) = \frac{(\ln(x))^n}{n!x^2}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans u repère orthogonal $(0,\vec{i},\vec{j})$ du plan($\|\vec{i}\| = 1\,cm$ et $\|\vec{j}\|$

I – 1) Etudier les variations de la fonction f_1.

2) Construire C_1 ainsi que la tangente à C_1 point d'abscisse 1.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calc pour x de $]0,+\infty[$, $I_1 = \int_1^x f_1(t)\,dt$.

II - 1)Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ $(n \geq 1)$.

2) a- Pour $n \geq 2$, étudier les variations de f_n (on distinguera deux cas n pair ou n impair).

b- Pour $n \geq 1$, vérifier que f_n admet un maximu local $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

3) a- Soit x un réel de IR_+^*, étudier, suivant les vale x, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$. En déduire les position relatives de C_1 et C_2.

b- Construire C_2 ainsi que la tangente à C_2 au d'abscisse 1 dans le même repère que C_1.

4) a- Pour x de $]1,+\infty[$,calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b- Montrer que:
$$\forall n \geq 1;\ y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \text{ et } y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n .$$

c- En déduire que $\forall n \geq 1;\ y_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}$.

Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$?

III – Pour tout entier $n \geq 1$, à tout réel x > 0;on as l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$.

1) a- Soit $k \in IN^*$; en utilisant une intégration par parties, démontrer la relation $I_{k+1} - I_k = -\frac{(\ln(x))^{k+1}}{(k+1)!x}$.

b- En déduire que pour tout entier naturel no nul n :

$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{(\ln(x))^2}{(2)!x} - \frac{(\ln(x))^3}{(3)!x} - \dots - \frac{(\ln(x))^n}{(n)!x}$.

2) α est un réel fixé de $[1, +\infty[$

a- Montrer que

$\forall n \in IN^*; 0 \le I_n(\alpha) \le (\alpha - 1) y_n$ (y_n défini au $II-2)$ b-)

b- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\alpha)$

3) pour tout entier n≥ 1 et pour tout réel x≥ 1 on pose $V_n(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{1!} + \frac{(\ln(x))^2}{(2)!} + \frac{(\ln(x))^3}{(3)!} + \dots + \frac{(\ln(x))^n}{(n)!}$

a- Exprimer $V_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$. déterminer la limite de $V_n(\alpha)$ lorsque n tend vers $+\infty$

b- En déduire la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Donner une valeur décimale approchée de u_6 à 10^{-4} près. Comparer cette valeur avec ℓ.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur [0,1] par

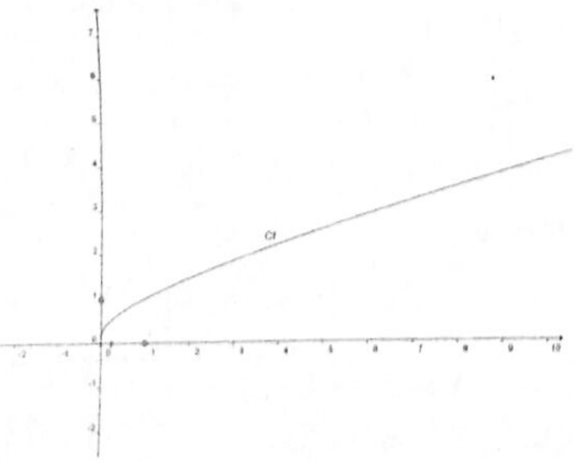
$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, si $x \in]0,1[$

$f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

1° a) Justifier l'existence du réel $I = \int_0^1 f(t)\,dt$

a) Interpréter graphiquement I

b) On donne ci-dessous la représentation graphique de f.



Construire dans ce repère la représentation graphique de f^{-1} la réciproque de f.

c)Exprimer à l'aide I , le réel $\int_0^1 f^{-1}(t)\,dt$

2° Soit F la fonction définie sur]0,1] par

$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t}\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur]0,1] et que $F'(x) = f(x)$

b) En déduire que $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

3° a) Montrer que, pour tout t > 0, ln t ≤ t – 1

b) En déduire que, pour tout t ∈ [0,1], 0 ≤ f(t) ≤ 1

c) Prouver alors que, pour tout x ∈]0,1], 0 ≤ I + F(x) ≤ x.

4° a) Montrer que, pour tout x ∈]0,1[, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} = \ln 2$.

b) Prouver alors que, pour tout x ∈]0,1[, $0 \le F(x) + \ln 2 \le \frac{x^2 - x}{\ln x}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.

5° Prouver finalement que I = ln2.

Exercice 4:

A. 1) Etudier la fonction f définie sur IR par

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

puis tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Pour tout x réel on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a – Montrer que F est dérivable sur IR , et étudier le sens de variation de F .

b – Montrer que F est impaire

c – Montrer que pour tout x ∈IR, $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \le \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$,en déduire ln (x+1) ≤ F(x) , calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3) Pour x ∈IR on pose

$G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt = F(2x) - F(x)$

a – Montrer que G est dérivable sur IR et étudier le sens de variation de G sur IR .

b – Justifier pour tout x> 0 , $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{x}$, en déduire que G(x) ≤ ln(2)

c – Déduire de a et b que G admet une limite finie L en $+\infty$

d – Montrer que G est impaire. Exprimer alors la limite de G(x) en $-\infty$ en fonction de L .