Série fonctions ln et exponentielle

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$, si $x>0$ et $f(0)=0$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et préciser la demi tangente à $\mathscr{C}_f$ en O.
2) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f=2$.
3) Montrer que pour tout $x>0$, $f''(x)=\frac{-4}{x(x+2)^2}$. Dresser le tableau de variation de f'.
4) Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5) Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$. En utilisant les variations de f montrer que u est croissante et majorée. Calculer $\lim\limits_{+\infty} u_n$.
6) Soit g une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et vérifiant : $g(x)-x\,g'(x)=\frac{2x}{x+2}$ ®
   a) On pose $G(x)=\frac{g(x)}{x}$. Montrer que pour tout $x>0$, $G'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$.
   b) En déduire toutes les fonctions g vérifiant ®.

Exercice 2 :

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$.

1) Calculer I_1.
2) Montrer que I est décroissante et qu'elle converge.
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant I_n\leqslant\frac{(\ln 2)^n}{n!}$. En déduire la limite de I.
4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
   $I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$.
5) Soit $u_n=1+\frac{\ln 2}{2!}+\frac{(\ln 2)^2}{3!}+\ldots+\frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}$; $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de u.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$.

1) Etudier les variations de f.
2) Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\int_x^{x^2}f(t)\,dt$ si $x>1$ et $g(1)=0$.
   a) Montrer que pour $x>1$ on a : $(x^2-x)f(x^2)\leqslant g(x)\leqslant(x^2-x)f(x)$.
   b) Montrer que g est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et préciser sa dérivée.
   c) Calculer : $\lim\limits_{+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{+\infty}\frac{g(x)}{x}$.
   d) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 1.

Exercice 4 :

A) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2) Montrer que f réalise une bijection et préciser le domaine de dérivabilité de f^{-1}.
3) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$. Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère.
4) Soit $\mathscr{T}$ la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = 2ln(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2})$. Montrer que $\mathscr{T}$ est l'image de $\mathscr{C}'$ par une similitude indirecte de centre O que l'on précisera.

B) Soit u la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 1$: $u_{n+1}+1 = 2u_n^{\,2}$.
1) Montrer que pour tout n, $u_n > 1$.
2) On pose pour tout n, $v_n = f(u_n)$.
 a) vérifier que v est bien définie et calculer v_0.
 b) Montrer que v est géométrique.
 c) Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n}\right]$

Exercice 5 :

A) Soit $x > -1$. On pose $\varepsilon_2(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

1) a) Montrer que si $x \geqslant 0$ alors $0 \leqslant \varepsilon_2(x) \leqslant \frac{x^3}{3}$.

b) Montrer que si $x \in]-1,0]$ alors $\frac{x^3}{3(1+x)} \leqslant \varepsilon_2(x) \leqslant 0$.

c) En déduire la limite de $\frac{\varepsilon_2(x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

2) a) Montrer que pour $x > -1$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2(x)$.

b) Calculer la limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

3) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$.
b) Etudier les variation de h définie par : $h(x) = x-(x+1)\ln(x+1)$. En déduire le signe de $h(x)$.
c) Etudier f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On étudiera la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente en O.

B) Pour $x \in]-1,0]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\varepsilon_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$.

1) a)Etudier suivant la parité de n le signe de $\varepsilon_n(x)$.

b) Etudier le signe de $\varepsilon_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$. En déduire que $|\varepsilon_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$.

2) a) Montrer que pour tout $t \neq -1$, on a : $\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^n t^n}{1+t}$.

b) En déduire que pour $x \in]-1,0]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \varepsilon_n(x).$$

3) On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{3\times 2^2}+\dots+\frac{1}{n\times 2^{n-1}}\right]$.

Déterminer la limite de u.

Exercice 6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on associe la fonction f_n définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$. On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité $2\,cm$).

A) Soit h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1) Etudier les variations de h_n et préciser $h_n(0)$. En déduire le signe de $h_n(x)$.
2) Etudier les variations de f_1.
3) Pour $n \geqslant 2$, vérifier que $(f_n)'(x) = x^{n-1}h_n(x)$. Dresser le tableau de variations de f_n.
4) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ puis tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

B) Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$. En déduire la limite de u.
2) Déterminer n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{100}$.
3) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$ et calculer u_1.
4) Pour $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 2$, $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$.
   a) Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$.
   b) Etablir que : $1 - \dfrac{1}{2} + \ldots. + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$.
   c) Montrer que $u_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$.
5) Calculer en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 7 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ unité $2\,cm$.

1) Dresser le tableau de variation de f_n et étudier la position relative de $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$.
2) Tracer $\mathscr{C}_1$et $\mathscr{C}_2$.
3) On pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x$.
   a) Calculer I_1.
   b) Montrer que I est décroissante.
   c) Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{e^{n-1}}\right)$. En déduire la limite de I.
   d) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a : $(n-1)^2 I_n = 1 - n\, e^{1-n}$. En déduire la limite de (nI_n) et $(n^2 I_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
4) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;1]$ par : $f_n(x) = x^2 \ln^n x$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

1) Montrer que f_n est continue et dérivable sur $[0\,;1]$.

2) Dans cette question $n=4$. Etudier f_4 puis tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité 5 cm.

3) Soit $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}$ si $x\in]0\,;1]$ et $F(0)=0$. Montrer que F est une primitive de f_1 sur $[0\,;1]$.

4) Soit $x\in]0\,;1]$. On pose $I_n(x)=\int_x^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ et $J_n=\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que J_n est la limite de $I_n(x)$ quand x tend vers 0^+.

b) Calculer J_1.

c) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0\,;1]$ on a : $I_{n+1}(x)=-\dfrac{1}{3}x^3(\ln x)^{n+1}-\dfrac{n+1}{3}I_n(x)$.

d) En déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$: $J_{n+1}=-\dfrac{n+1}{3}J_n$.

e) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $J_n=(-1)^n\dfrac{n!}{3^{n+1}}$.

5) Déterminer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Exercice 9 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et $g(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

1) Etudier f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ de g est la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport au point $I\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$. Tracer $\mathscr{C}_1$

3) Calculer $\int_1^k f(x)\mathrm{d}x$ où $k>0$.

4) Soit $m>0$, montrer que $\dfrac{1}{m+1}\leqslant\ln(m+1)-\ln m\leqslant\dfrac{1}{m}$. En déduire que $0\leqslant f(m)\leqslant\dfrac{1}{m(m+1)}$.

5) Pour tout entier $n\geqslant 2$, on pose $\alpha_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ et $\beta_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$.

a) Montrer que : $\alpha_n\leqslant\ln n\leqslant\beta_n$. En déduire les limites de β et α.

b) Montrer que les suites $u_n=\beta_n-\ln n$ et $v_n=\beta_{n+1}-\ln n$ $(n\geqslant 2)$ sont adjacentes et que leur limite $l\in]0\,;1[$.

6) Soit pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=n}^{2n}f(k)$ et $w_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

a) Montrer que : $0\leqslant S_n\leqslant\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k(k+1)}$. En déduire la limite de S.

b) Vérifier que $S_n=w_n-\ln 2-\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$. En déduire la limite de w.

7) On pose $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $I_1=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t$ et $I_k=\int_0^1(t^{2k-2}-t^{2k-1})\mathrm{d}t$ $k\geqslant 2$.

a) Calculer I_1 et I_k. En déduire que $x_n=I_1+\ldots+I_n=\int_0^1\left(\dfrac{1-t^{2n}}{1+t}\right)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\left|x_n-\int_0^1\dfrac{dt}{1+t}\right|\leqslant\dfrac{1}{2n+1}$. En déduire la limite de la suite (x_n).

c) Montrer que $x_n=w_n-\dfrac{1}{n}$. Retrouver la limite de w.

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x}\ ,\ si\ \ x>0\ \ et\ \ x\neq 1 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1) a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.
   b) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2) Soit u la suite définie par : $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant e$.
   b) Etudier la monotonie de u. En déduire que u converge et préciser sa limite.
3) On considère la fonction φ définie sur $[0\,;1[$ par : $\begin{cases} \varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ ,\ si\ \ x\in]0,1[\\ \varphi(0)=0 \end{cases}$.
   a) Montrer que φ est continue à droite en 0.
   b) Montrer que pour $x\in]0,1[$, $f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant 0$. En déduire que φ est dérivable à droite en 0.
   c) Pour $x\in]0,1]$, $\alpha(x)=x-1-\dfrac{2}{3}\ln x$. Etudier le sens de variations de α. En déduire que pour $x\in\left[\dfrac{2}{3}\,;1\right]$, $\alpha(x)\leqslant 0$.
   d) Montrer que pour tout $t\in\left[\dfrac{2}{3}\,;1\right[$, $f(t)\leqslant\dfrac{2t}{3(t-1)}$. En déduire la limite de φ à gauche en 1.
   e) Dresser le tableau de variations de φ.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etudier f et tracer $\mathscr{C}$.
2) On pose pour $x>0$: $F(x)=\displaystyle\int_{2x}^{3x}\left(\frac{1}{t^2}-f(t)\right)\mathrm{d}t$.
   a) Montrer que pour $x>0$, on a : $e^{2x}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\leqslant\displaystyle\int_{2x}^{3x}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant e^{3x}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
   b) En déduire la limite de F à droite en 0.
3) Montrer que pour $x>0$, $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{3x}\leqslant\displaystyle\int_{2x}^{3x}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{e^{3x}-e^{2x}}{2x}$. En déduire que pour tout réel $x>0$: $F(x)\leqslant\dfrac{1-e^{2x}}{6x}$.
4) Montrer que F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $F'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2(-1-2e^x)}{6x^2}$. Dresser alors le tableau de variation de F.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}}$.

1) Montrer que f est paire puis étudier f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$.
2) Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^{\ln\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]} f^2(t)\,dt$, $x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$.
   a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$, $F(x) = x$.

c) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de $\mathscr{C}$ définie sur $\left[-\ln\sqrt{3}\,;\,\ln\sqrt{3}\right]$.

3) Montrer que l'équation $f^2(x) = x$ admet une solution unique a et que $0 < a < \frac{1}{2}$.

4) Vérifier que $a = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$.

5) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^a f^{2n}(x)\mathrm{d}x$. Montrer que $a^{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{a}{2^n}$. En déduire la limite de u.

Exercice 13 :

A) Soit f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x\ln x}{x+n},\ si\ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Soit $g_n(x) = x + n(1+\ln x)$, $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dresser le tableau de variation de g_n. En déduire que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n et que $\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\alpha_{n+1}) - \ln(\alpha_n) = \frac{n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) + \alpha_n}{n(n+1)}$). En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante puis calculer sa limite.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.

3) Dresser le tableau de variation de f_n et vérifier que $f_n(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n}$.

4) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$ puis tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

B) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \int_0^{e^x} f_n(t)\mathrm{d}t$; $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'_n(x)$.

2) Déterminer la limite de F_n en $-\infty$.

3) Montrer que pour tout réel x, $F_n(x) = F_n(1) + \int_e^{e^x} f_n(t)\mathrm{d}t$. En déduire la limite de F_n en $+\infty$.

4) Dresser le tableau de variation de F_n et tracer l'allure de sa courbe.

Exercice 14 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Dresser le tableau de variation de f_n.

2) Soit A_n le point d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et la droite $\mathscr{D} : y = 2$. Montrer que A_n est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_n$.

3) Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

4) Soit u_n la valeur moyenne de f_n sur $\left[0\,;\,\frac{\ln 7}{n}\right]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

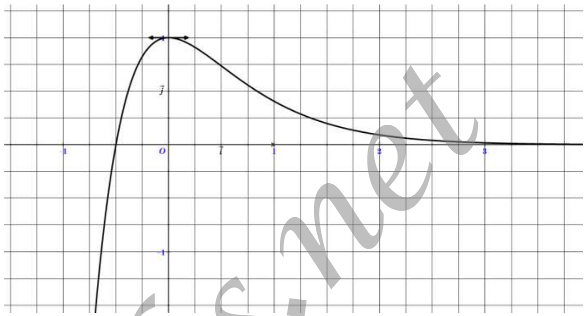
5) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x)=\int_0^{\ln x} f_n(t)\mathrm{d}t$ où $x>0$.

a) Montrer que F_n est dérivable et que $(F_n)'(x)=\dfrac{4x^{n-1}}{x^n+7}$.

b) Dresser le tableau de variation de F_n.

Exercice 15 :

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1) Pour $x\geqslant 0$, on pose : $g(x)=\int_1^{f(x)} e^t\ln t\,\mathrm{d}t$.

a) A l'aide du graphique, dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer le sens de variation de g.

c) Sachant que $f(x)=(ax+b)e^{cx}$. Montrer que $a=2$, $b=1$ et $c=-2$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}x$.

a) Montrer que pour tout réel $t\geqslant 0$, $1-t\leqslant\dfrac{1}{1+t}\leqslant 1$. En déduire que pour tout réel $x\geqslant 0$ on a :

$x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$.

b) Montrer alors que pour $x\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $e^{x-\frac{x^2}{2n}}\leqslant\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant e^x$.

c) Montrer que pour $x\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}\mathrm{d}x\leqslant I_n\leqslant 1-e^{-n}$.

3) Montrer que pour $x\geqslant 0$, $1-x\leqslant e^{-x}$. En déduire que pour $x\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $1-\dfrac{x^2}{2n}\leqslant e^{-\frac{x^2}{2n}}$.

4) Calculer $\int_0^n x^2e^{-x}\mathrm{d}x$. En déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geqslant 1-\dfrac{1}{n}+\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{n}{2}\right)e^{-n}$.

Calculer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 16 :

A) Soit g la fonction définie sur $]-\ln 2;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{2e^x-1}}$.

1) Etudier les variations de g et construire sa courbe Cg.

2) Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=-\ln(1+\sin x)$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque φ définie sur $]-\ln 2;+\infty[$.

c) Montrer que φ est dérivable sur $]-\ln 2;+\infty[$ et que pour $x\in\,]-\ln 2;+\infty[$ on a : $\varphi'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{2e^x-1}}$.

3) Déterminer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par Cg, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$.

B) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0;+\infty[$, on pose $G_n(x)=\int_0^x (g(t))^n\,dt$.

1) a) Calculer $G_1(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} G_1(x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

b) Pour $t>-\ln 2$ on pose $K(t)=\ln(2-e^{-t})$. Montrer que $K'(t)=g^2(t)$.

c) Calculer alors $G_2(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G_2(x)$.

2) a) Prouver que pour tout $t\geq 0$ on a : $-e^{\frac{-t}{2}}\leq g(t)\leq 0$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0;+\infty[$ on a : $|G_n(x)|\leq\dfrac{2}{n}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

3) a) Vérifier que $\forall t\geq 0$ on a : $g(t)+(g(t))^3=-2g'(t)$.

b) En déduire que $\forall x\geq 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $G_n(x)+G_{n+2}(x)=-\dfrac{2}{n}\left[(g(x))^n-(-1)^n\right]$.

a) Montrer que G_n admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 17 :

A) Pour tout réel x, on pose : $I(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{(t-x)^2e^t}{2}\,dt$.

1) Montrer que pour $x\geqslant 0$, $0\leqslant I(x)\leqslant\dfrac{x^3e^x}{6}$ et pour $x\leqslant 0$, $0\leqslant |I(x)|\leqslant\dfrac{|x^3|}{6}$.

2) Montrer que pour tout réel x, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+I(x)$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x-1} & \text{, si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que pour tout réel x, $e^x-xe^x-1\leqslant 0$.
c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

B) Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour $x\neq 0$, $g'(x)=\dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$.

2) Montrer que pour $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{g(x)}{x}$ est compris entre $f(x)$ et $f(2x)$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

4) Tracer l'allure de la courbe Γ de g dans un repère orthonormé unité 3 cm.

C) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. On considère la suite U la suite définie par: $U_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\varphi(U_n)$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$.
2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $e^x - x^2 - 1 \geqslant 0$. En déduire que U est croissante.
3) Montrer que si U converge vers un réel α alors $\alpha \neq 0$.
4) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 18 :

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1) Etudier f et tracer $\mathscr{C}$.

2) Montrer que la restriction g de f à $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Expliciter $g^{-1}(x)$.

3) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{e}$.

4) Soit $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(\tan x)}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ où $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = \dfrac{\pi}{4} - x$.

5) Calculer en cm^2, l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

B) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{f(x)} (1 + \ln t)^n \mathrm{d}t$.

1) Montrer que $F_n(x)$ existe quelque soit le réel x.
2) Calculer $F_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x)$.
3) Montrer que $F_{n+1}(x) = f(x)[1 + \ln(f(x))]^{n+1} - (n+1)F_n(x)$.
4) Montrer que F_n admet une limite finie α_n quand x tend vers $+\infty$.
5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n!}{e}$.
6) Dresser suivant n, le tableau de variation de F_n (sans calculer $F_n(0)$).

Exercice 19 :

A) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$. (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ et $\|\vec{j}\| = 10$ en cm.
   1) Dresser le tableau de variation de f_n.
   2) Pour tout entier $n \geqslant 2$, étudier la position relative de (C_n) et (C_{n-1}) et vérifier que $A_n(n, f_n(n)) \in (C_{n-1})$.
   3) Construire (C_1), (C_2) et (C_3). On placera les tangentes en O à ces 3 courbes.

B) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = f_n(n)$.
   1) Montrer que U est décroissante et qu'elle converge.
   2) Montrer que pour tout $t \in [0\,;1]$ on a: $\mathrm{Log}(1 + t) \leqslant t - \dfrac{t^2}{4}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1 - \frac{1}{4n}}$.
   3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}$.

4) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ on a: $U_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$.

5) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a: $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}$.

6) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ on a: $U_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\mathrm{Log}\,n}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

C) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.

1) Calculer $I_1(x)$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $t \geqslant 0$ on a: $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}$. En déduire un encadrement de $I_n(x)$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$. (On pourra utiliser la suite U).

4) Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(x)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$.

5) Pour $n \geqslant 2$, établir une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$. en déduire que pour tout $n \geqslant 2$ on a: $I_n(x) = 1 - e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$.

6) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$.