

Exercice 1

Soit α un réel de $[0, +\infty[$.

On note $I_0(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dt}{1+t}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{(t-\alpha)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$.

1. Calculer $I_0(\alpha)$ et $I_1(\alpha)$ en fonction de α .

2. a. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_{n+1}(\alpha) = \frac{(-1)^{n+1} \alpha^{n+1}}{n+1} + I_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire les valeurs de $I_2(\alpha)$ et $I_3(\alpha)$ en fonction de α .

3. Soit $J(\alpha) = \int_0^\alpha (t-\alpha)^3 dt$.

a. Montrer que $J(\alpha) \leq I_3(\alpha) \leq 0$.

b. Calculer $J(\alpha)$.

c. En déduire que $\left| \ln(1+\alpha) - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha \right| \leq \frac{\alpha^4}{4}$.

d. Déterminer un intervalle à lequel appartient α pour que $\frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha$ soit une valeur approchée de $\ln(1+\alpha)$ à 10^{-3} près.

Exercice 2

I) Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$

(C) désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).

2) Soit $\alpha \in]-1, 0[$, on note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par (C) et les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = -x$.

Calculer $A(\alpha)$ puis déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow -1^+} A(\alpha)$.

II) Soit g la fonction définie sur $[-1, 0]$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } -1 < x < 0 \\ g(-1) = 0 \text{ et } g(0) = 1 \end{cases}$

(Γ) désigne la courbe de g dans un repère orthonormé $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Montrer que g est continue sur $[-1, 0]$.

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en -1.

2) a) Montrer que $\forall x \in]-1, 0], 0 \leq \int_x^0 \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{-x^3}{3(1+x)}$.

b) En déduire que $\forall x \in]-1, 0], \frac{x^2}{2} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3(1+x)}$.

c) Montre alors que g est dérivable à gauche en 0 et que $g'_g(0) = \frac{1}{2}$.

3) a) Montrer que $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$ sur $]-1, 0[$.

b) Dresser le tableau de variation de g puis tracer (Γ).

Exercice 3

I/ Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln(x)$.

- ① Dresser le tableau de variation de g .
- ② Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 2.1$
- ③ En déduire le signe de $g(x)$.

II/ Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} + x(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ① a) Montrer que f est continue à droite en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.
- ② Dresser le tableau de variation de f .
- ③ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[\alpha, +\infty[$ une unique solution β et que $6.1 < \beta < 6.2$
b) Tracer C_f .
- ④ Soit $m \in]0, 1[$. On désigne par $\mathcal{A}(m)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = m$ et $x = 1$.
a) Exprimer $\mathcal{A}(m)$ en fonction de m .
b) Déterminer $\lim_{m \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(m)$.

III/ Soit $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- ① a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq S_n \leq \frac{3}{n}$.
b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- ② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2}$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n+1}{2n^2} + \frac{2}{n^2 \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - S_n$.
c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 4

Soit F_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^2} dt$; $n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer $F_1(x)$ en fonction de x puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x)$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [1, +\infty[$, $F_{n+1}(x) = -\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} + (n+1)F_n(x)$.

3)a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x)$ admet une limite finie L_n lorsque x tend vers $+\infty$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n = n!$

4)a) Dresser le tableau de variation de F_n .

b) Tracer l'allure de la courbe (Γ_2) de F_2 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

