Lycée Pilote Sfax	**Série N°27**	$4^{\text{ème}}$ Math
A/S : 2020-2021	(Fonctions logarithme népérien)	Mr Jellali

Exercice 1

Déterminer les limites ci-dessous.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-2}{x\ln x}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(x\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(x^4\left(1-\ln^5 x\right)\right)$ 7) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\sqrt{x}\ln x\right)$ 8) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \left(\dfrac{\ln x+\ln 2}{x-\frac{1}{2}}\right)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrer que f est continue à droite en 0.

2. Soit v la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $v(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction v.

   b. En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\ln(1+x)-x\le-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

   c. En déduire que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$. Interpréter le résultat graphiquement.

3. a. Soit u la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $u(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$.

   Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $u(x)\le0$.

   b. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u\left(\sqrt{x}\right)}{2x\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

   c. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Exercice 3

1. a. Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $x-\ln x\ne0$.

   b. Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$.

   Etudier g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\int_n^{2n}\frac{dx}{x-\ln x}$.

   Interpréter graphiquement la valeur de u_n.

3. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{2n}\frac{dx}{x}=\ln 2$.

   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n-\ln 2=\displaystyle\int_n^{2n}\frac{\ln x}{x(x-\ln x)}dx$.

   c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\le u_n-\ln 2\le\dfrac{\ln\left(2n^2\right)}{n-\ln(n)}$.

   d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$