Comme je ne suis pas payé en fonction de ce que je fais,
je fais en fonction de ce que je suis payé *[Georges Wolinski]*

Exercice 1 : 3 points :
Questions indépendantes

1) Calculer $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) dx$.

2) Calculer chacune des limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+\ln(x))}{x-1}$ b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x-\sqrt[3]{x})}{\ln(x^2-x)}$

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1) Etudier la monotonie de (I_n)
2) a) Evaluer I_1
b) Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3) M que pour tout entier naturel non nul n, $I_n \le \frac{e}{n+1}$
4) Montrer que (I_n) est convergente puis calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 3:

Calculer les limites suivantes:

$\lim_{+\infty} \frac{-1+\ln x}{x-2\ln x}$, $\lim_{+\infty} (x+1)\ln\frac{x}{x+1}$; $\lim_{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$;

; $\lim_{+\infty} [\frac{x+3}{x^2+1}\ln x]$; $\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^4}{\sqrt[5]{x}}$; $\lim_{+\infty} [\frac{\ln(x+3)}{\ln x}]$;

$\lim_{0^+} (x\sqrt{1+\ln^2 x})$; $\lim_{0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$; $\lim_{+\infty} \frac{x^2-2}{x\ln x}$

$\lim_{0^+} (\tan x \ln x)$; $\lim_{0^+} \frac{\ln(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2})}{x}$

$\lim_{0^+} \frac{\ln(1+2017x)}{x}$; $\lim_{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$;

Exercice 4:

Calculer les intégrales suivantes :

$M=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$; $A=\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx$; $H=\int_1^e t\ln t\, dt$

$D=\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$; $I=\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln x\, dx$;

Exercice 5 :7 points :

f est la fonction définie sur IR* par $f(x) = \ln|x| - \frac{\ln|x|}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR* et que pour tout x de IR* ; $f'(x) = \frac{x-1+\ln|x|}{x^2}$.

b) Soit h la fonction définie sur IR* par :
$h(x) = \ln|x| + x - 1$.
Etudier les variations de h.
Calculer h(1) puis déduire le signe de h(x) sur IR*.

2) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) a) Démontrer que pour tout n de IN*, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $[1,+\infty[$.

b) Démontrer que la suite (x_n) est monotone puis déduire qu'elle est convergente.

c) On note ℓ la limite de la suite (x_n) ;

Justifier que $f(\ell) = 0$ puis déduire ℓ.

4) Soit g la restriction de f sur $]-\infty, 0[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction réciproque g^{-1} dans le même repère.

Placer le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse – 2.

5) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par C'et les droites d'équations: $y = 0$, $x = 0$ et $x = \ln(2\sqrt{2})$.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur IR+ par

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + x\ln x \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0+

b) Etudier f puis construire sa courbe C.

2)a) Mque $\forall x \ge 0$; $\frac{x}{x+1} \le \ln(x+1) \le x$

b)En déduire que $\forall k \le n$, $\frac{k^2}{n^2+n^3} \le \ln(1+\frac{k^2}{n^3}) \le \frac{k^2}{n^3}$

c)Déduire la limite de la suite u définie par :

$u_n = \prod_{k=1}^{n} (\frac{n^3+k^2}{n^3})$

On rappelle que $\sum_0^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 7 (9 points)

Soit f la fonction f définie sur $[\frac{1}{e}, e]$ par

$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.

1) a) Calculer f (e) et $f(\frac{1}{e})$

b) Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, e]$ sur [-2, 2]

c) Dans l'annexe jointe, on a tracé la courbe (C) de la fonction f et les demi-tangentes aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e. Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de f^{-1} et les demi-tangentes à (C') aux points d'abscisses –2 et 2.

2) Soit la suite (a_n) définie, pour tout $n \in IN^*$, par

$$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

a) Calculer a_1.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$

c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.

3° Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites y = 0, x = – 2 et x = 0

a) Calculer $\int_1^e f(x)\, dx$

b) En déduire A.

Exercice 8:

Soit f la fonction définie sur IR+,

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{-1+x};\ x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0; f(1) = 1 \end{cases}$$

1)a)Montrer que f est continue sur IR+

b)Etudier la dérivabilité de f en 0+

2)Soit $\varphi(t) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}(t-1)^2 - t\ln t - 1 + t$, $x \in IR^*_+ \setminus \{1\}$

a) Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1 et x tel que $\varphi'(c) = 0$

b) Déduire $\lim\limits_{1} \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$

b) Prouver que f est dérivable en 1 puis donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3)a)Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 + 2x\ln x$ puis déduire le signe de g(x).

b)Etudier alors la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

4)Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C) de f.

Exercice 9 **(7 points)**

Soit par $f(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t^2}\, dt$, $x > 0$

1° a)Etudier le sens de variations de f.

b)En déduire le signe de f(x)

2° a)Soit x un réel strictement positif, calculer $\int_1^x \dfrac{\ln t}{t^2}\, dt$.

b)En déduire que pour tout $x \geq 1$,

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x\right) \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x$$

c)Prouver alors que f admet en $+\infty$ une limite finie l et que $\dfrac{1}{2} \leq l \leq 1$

3° a)Montrer que, pour tout réel x > 0, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

b)En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 10:

Soit la famille des fonctions f_n, $n \geq 2$ définie sur $]1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \int_x^{nx} \dfrac{dt}{\ln t}$

On désigne par C_n la courbe de f_n.

1°) n et m étant deux entiers tels que $2 \leq n < m$, étudier la position relative de la courbe C n et Cm.

2°) a – Démontrer que f n est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'_n(x)$, x > 1

b – En déduire que (C_n) admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point d'abscisse $u_n = n^{\frac{1}{n-1}}$ et d'ordonnée $v_n = f_n(u_n)$

3°) a – Montrer que la suite (un) est convergente .

b –Montre que $\forall t > 1$, ln(t)< t-1

c) M que $\forall\ n \geq 2$ on a : $\dfrac{(n+1)^n}{n^n} < e$ et $\dfrac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1$

En déduire la monotonie de la suite (u_n)

Exercice 11:

I/ Soit f la fonction définie sur IR+ par

$$\begin{cases} f(x) = x(-1 + \ln(x)) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un repère ortho normal

3)Soit φ la restriction de f à l'intervalle [0, 1].

Montrer que φ réalise une bijection de [0, 1] dans un intervalle J à préciser.

a- Déterminer le domaine de dérivabilité de φ^{-1}.

b- Construire les courbes C de φ et C' de φ^{-1} dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

II/ Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_n > 0 \text{ et } u_{n-1} f'(u_n) = f(u_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

1)a)Mque u est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$.

b- Exprimer alors u_n en fonction de n

Pour tout $k \in IN$, M_k et M_{k+1} sont les points de C d'abscisses respectives u_k et u_{k+1}.

Soit S_k l'aire du triangle OM_kM_{k+1}.

a- Prouver que $S_k = \frac{1}{2}[u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})]$

b- Calculer S_k en fonction de k.

c- Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k$, Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 12 :

I/ Soit f la fonction définie par

$f(x) = \ln[\,x + \sqrt{x^2-1}\,]$

1) Déterminer le domaine D de f.

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un r.o.n$(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a-Montrer que f réalise une bijection de D dans un intervalle J à préciser.

b- Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.

c- Construire la courbe C' de f^{-1} dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in IR+$.

II/ Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 1+u_{n+1} = 2u_n^2, \ n \geq 0 \end{cases}$

Montrer que pour tout n , $u_n > 1$.

2) On pose pour tout n de IN, $V_n = f(u_n)$

a- Vérifier que la suite (V_n) est bien définie et déterminer v_0.

b)Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique puis déduire l'expression de v_n en fonction de n et v_0.

c)M alors que $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n}\right]$

Exercice 13:(4 points)

Soit f la fonction définie sur [0,1] par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}, \ si\ x \in]0,1[\\ f(0) = 0 \ et\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que f est continue sur [0,1].

2) Soit F la fonction définie sur [0,1] par: $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

Et G la fonction définie sur]0,1] par: $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t}dt$

a) Montrer que G est dérivable sur]0,1] et que G'(x) = f(x)

b) En déduire que pour tout x de]0,1], G(x) = F(x)

c) Prouver alors que $\lim_{x\to 0^+} G(x) = F(0)$

3) a) Montrer que pour tout x de]0,1[, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2$

b) En déduire pour tout x de]0,1[, $0 \leq G(x) + \ln 2 \leq \frac{x^2-x}{\ln x}$

c) Calculer alors F(0)

Exercice 14

1° Soit f la fonction définie sur [0,+∞[par

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x\ , \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Donner une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

2° a) En utilisant la relation $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, montrer que pour tout réel x > 0, $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$

b) En déduire la position relative de C_f et T.

c) Tracer T et C_f dans un même repère orthonormé

3° Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

a) Justifier l'existence de F(x) pour tout $x \geq 0$

b) Calculer F(x) pour x > 0

c) En déduire que $F(0) = \frac{1}{4}$.

4° Calculer l'aire de la région limité par la courbe de f et les droites d'équations respectives

y = x –1 et x = 0

Exercice 15:(4 points)

Soit f la fonction définie sur [0, +∞[

par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2};\ \ x > 0 \end{cases}$

1) Soit $x \geq 0$, montrer que pour tout $t \in [0, x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) Soit x > 0

a/ Montrer que $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

b/ Montrer que $\frac{1}{1+2x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire que f est continue à droite de 0

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$;

$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

4) Soit x > 0

a/ Montrer que $f'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x (\frac{t}{1+2t})^2\,dt$

b/ En utilisant 1) montrer que $\frac{-4}{3} \leq f'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

c/ Déduire que ; $\frac{-4x}{3} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{4x}{3(1+2x)^2}$

d/ En déduire que f est dérivable à droite de 0 et préciser le nombre dérivé à droite de 0.

5) Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

Exercice 16 : (6 points)

1) Soit f la fonction numérique définie sur IR par

$f(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que le point I(1, 0) est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

2) Soit n un entier naturel non nul et (u_n) la suite réelle définie sur IN par :

$u_0 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}\,dt$ et

$u_n = \int_0^2 \frac{(t-1)^{2n}}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}\,dt$, si n>0 .

Soit $I = \int_0^2 \sqrt{t^2 - 2t + 2}\,dt$.

a) Calculer u_0.

b) Montrer que $u_0 + u_1 = I$.

c) Montrer que $u_1 + I = 2\sqrt{2}$.

d) En déduire u_1.

e) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$\frac{\sqrt{2}}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{2}{2n+1}$.

f) En déduire $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n$.

Exercice 17 :

I/ On considère la fonction g définie sur $]0.+\infty[$ par

g(x) = -2lnx – 2x +1

1)Dresser le tableau de variation de g

2)Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $\propto$, vérifier que $\propto \in]0.5\,,1[$

3)En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

II/ On considère la fonction f définie sur $]0.+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+\ln x}{x^2}$

On donne ci-dessous la représentation graphique C de f dans un repère orthonormé

T est la tangente à C au point d'abscisse 1

1) a) Par une lecture graphique ,

déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to1} \frac{f(x)-2}{x-1}$

a) Donner un encadrement de f sur [1,3]

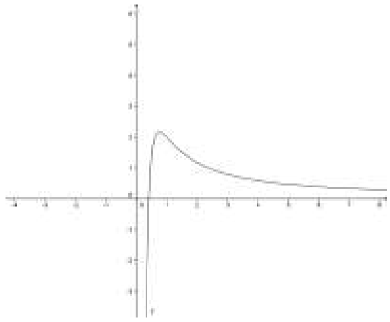
2) Montrer que f ' (x) = $\frac{g(x)}{x^2}$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Soit $\int_{2^n}^{2^{n+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2}\right)dt$ et $A_n = \int_{2^n}^{2^{n+1}} f(t)\,dt$

a)Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$I_n = \frac{\ln 2^{n-1} + 1}{2^{n+1}}$



b)Montrer que $A_n = I_n + 2\ln 2$

c)Donner une interprétation géométrique de A_0

d)Calculer $\lim_{n\to+\infty} A_n$

Exercice 18 :

Soit F la fonction définie sur IR* par

$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt.$

1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout x > 0, on pose $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt.$

a/ Vérifier que F(x) = g(2x) – g(x) ; pour tout x > 0.

b/ Montrer que g est dérivable sur IR*+ puis calculer F'(x) pour tout x > 0.

c/ En Déduire le sens de variations de F sur]0, +∞[.

3) a/ Montrer que pour tout x > 0, il existe un réel $c \in]x, 2x[$ tel que $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$.

b/ Déduire que,

pour tout x > 0 ; $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

c/ Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} F(x)$; $\lim_{x\to0^+} F(x)$.

4) a/ Dresser le tableau de variations de F.

b/ Tracer l'allure de la courbe C de F dans un repère orthonormé. (On donne $F(\sqrt{2}) \cong 0.7$)