Comme je ne suis pas payé en fonction de ce que je fais,
je fais en fonction de ce que je suis payé *[Georges Wolinski]*

Exercice 1 :

Les quatre questions sont indépendantes

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}-1}$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

3) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle [a, a+1].

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{a+1}$

b) Déduire que $\dfrac{1}{a+1} \le \ln(a+1) - \ln(a) \le \dfrac{1}{a}$

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1) Etudier la monotonie de (I_n)

2) a) Evaluer I_1

b) Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3) M que pour tout entier naturel non nul n, $I_n \le \dfrac{e}{n+1}$

4) Montrer que (I_n) est convergente puis calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 3:

Calculer les limites suivantes:

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{-1+\ln x}{x-2\ln x}$, $\lim\limits_{+\infty} (x+1)\ln\dfrac{x}{x+1}$; $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{+\infty} \left[\dfrac{x+3}{x^2+1}\ln x\right]$;

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{(\ln x)^4}{\sqrt[5]{x}}$; $\lim\limits_{+\infty} \left[\dfrac{\ln(x+3)}{\ln x}\right]$; $\lim\limits_{0^+} \left(x\sqrt{1+\ln^2 x}\right)$;

$\lim\limits_{+\infty} \left(\sqrt{x} - \ln\sqrt[3]{x}\right)$; $\lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$; $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2-2}{x\ln x}$

$\lim\limits_{0^+} \sqrt[5]{x}(\ln x)^4$; $\lim\limits_{0^+} (\tan x \ln x)$;

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)}{x}$

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln(1+2015x)}{x}$; $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$;

Exercice 4:

Calculer les intégrales suivantes :

$M = \int_0^1 \dfrac{x}{x+1} dx$; $A = \int_1^2 \dfrac{x}{1+x^2} dx$; $H = \int_1^e t\ln t\, dt$

$D = \int_e^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x} dx$; $I = \int_e^{e^2} \dfrac{1}{x}\ln x\, dx$;

Exercice 4:

Soit F la primitive de $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ qui s'annule en 1.

1)Expliciter F(x)

2)Montrer que pour tout $x \ge e$, on a :

$\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \le F(x+1) - F(x) \le \dfrac{\ln x}{x}$

3)Déduire la limite de la suite u définie sur IN* par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$

4)On pose v_n la valeur maximale de f_n

$f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{(\ln x)^n}{x}$

a)Vérifier que , pour tout $x \ge 1$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{\ln(x)}{n+1} f_n(x)$

b)Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

c)Déduire que (v_n) est convergente.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur IR+ par

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + x\ln x \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0+

b) Etudier f puis construire sa courbe C.

2)a) Mque $\forall x \ge 0$; $\dfrac{x}{x+1} \le \ln(x+1) \le x$

b)En déduire que $\forall k \le n$, $\dfrac{k^2}{n^2+n^3} \le \ln\left(1+\dfrac{k^2}{n^3}\right) \le \dfrac{k^2}{n^3}$

c)Déduire la limite de la suite u définie par :

$u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{n^3+k^2}{n^3}\right)$

On rappelle que $\sum_0^n k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 6:

1)Soit *g* la fonction définie sur [1, +∞[par $g(x) = 1 - x + x\ln x$

a)Etudier les variations de g.

b)En déduire le signe de g(x) pour $x \ge 1$

2)Soit *f* la fonction définie sur [1, +∞[par :

$f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ si $x > 1$ et $f(1) = 1$

Montrer que f est continue en 1

3)a)Mque $\forall t \ge 1$ on a : $t - 1 - (t-1)^2 \le 1 - \dfrac{1}{t} \le t - 1$

b)En déduire que $\forall x \ge 1$ on a :

$\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(x-1)^3}{3} \le x - 1 - \ln x \le \dfrac{(x-1)^2}{2}$

c)Déduire alors $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$

d)En déduire que f est dérivable en 1+ et calculer f'(1)

4)a)Dresser le tableau de variation de f Tracer C de f

Exercice 3 (9 points)

Soit f la fonction f définie sur $[\frac{1}{e}, e]$ par

$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.

1) a) Calculer f (e) et $f(\frac{1}{e})$

b) Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, e]$ sur [-2, 2]

c) Dans l'annexe jointe, on a tracé la courbe (C) de la fonction f et les demi-tangentes aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e. Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de f^{-1} et les demi-tangentes à (C') aux points d'abscisses –2 et 2.

2) Soit la suite (a_n) définie, pour tout $n\in$ IN*, par

$a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

a) Calculer a_1.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$

c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.

3° Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites y = 0, x = – 2 et x = 0

a) Calculer $\int_1^e f(x)\,dx$

b) En déduire A.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur IR+,

Soit $f(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{-1+x};\ x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0; f(1) = 1 \end{cases}$

1)a)Montrer que f est continue sur IR+

b)Etudier la dérivabilité de f en 0+

2)Soit $\varphi(t) = \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}(t-1)^2 - t\ln t - 1 + t$, $x \in$ IR*+\{1}

a) Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1 et x tel que $\varphi'(c) = 0$

b) Déduire $\lim\limits_{1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$

b) Prouver que f est dérivable en 1 puis donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3)a)Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 + 2x\ln x$ puis déduire le signe de g(x).

b)Etudier alors la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

4)Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C) de f.

Exercice 8 (7 points)

Soit par $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$, x > 0

1° a)Etudier le sens de variations de f.

b)En déduire le signe de f(x)

2° a)Soit x un réel strictement positif, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

b)En déduire que pour tout $x \geq 1$,

$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x) \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x$

c)Prouver alors que f admet en $+\infty$ une limite finie l et que $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$

3° a)Montrer que, pour tout réel x > 0, $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.

b)En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice9:

Soit la famille des fonctions f_n, $n \geq 2$ définie sur

$]1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \int_x^{nx} \frac{dt}{\ln t}$

On désigne par C_n la courbe de f_n.

1°) n et m étant deux entiers tels que $2 \leq n < m$, étudier la position relative de la courbe C_n et C_m.

2°) a – Démontrer que f_n est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'_n(x)$, x > 1

b – En déduire que (C_n) admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point d'abscisse $u_n = n^{\frac{1}{n-1}}$ et d'ordonnée $v_n = f_n(u_n)$

3°) a – Montrer que la suite (un) est convergente .

b –Montre que $\forall t>1$, ln(t)<t-1

c) M que $\forall\, n \geq 2$ on a : $\frac{(n+1)^n}{n^n} < e$

et $\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1$

En déduire la monotonie de la suite (u_n)

4°) a – En utilisant A / 3°) a / , montrer que $\lim\limits_{x\to1} f_n(x) = +\infty$

b – En déduire la limite de vn

Exercice 11:

I/ Soit f la fonction définie sur IR+ par
$$\begin{cases} f(x) = x(-1+\ln(x)) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
1)Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un repère ortho normal
3)Soit φ la restriction de f à l'intervalle [0, 1].
Montrer que φ réalise une bijection de [0, 1] dans un intervalle J à préciser.

a- Déterminer le domaine de dérivabilité de φ^{-1}.

b- Construire les courbes C de φ et C' de φ^{-1} dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

II/ Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_n > 0 \text{ et } u_{n-1} f'(u_n) = f(u_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$
1)a)Mque u est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

b- Exprimer alors u_n en fonction de n
Pour tout k $\in$ IN , M_k et M_{k+1} sont les points de C d'abscisses respectives u_k et u_{k+1}.
Soit S_k l'aire du triangle OM_kM_{k+1}.

a- Prouver que $S_k = \frac{1}{2}[u_{k+1}f(u_k) - u_k f(u_{k+1})]$

b- Calculer S_k en fonction de k.

c- Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k$, Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 13 :

I/ Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \ln[\,x + \sqrt{x^2-1}\,]$$
1) Déterminer le domaine D de f.
2)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C dans un r.o.n$(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a-Montrer que f réalise une bijection de D dans un intervalle J à préciser.

b- Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.
c- Construire la courbe C' de f^{-1} dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, x $\in$ IR+.

II/ Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ 1+u_{n+1} = 2u_n^2,\ n \geq 0 \end{cases}$$
Montrer que pour tout n , $u_n > 1$.

2) On pose pour tout n de IN, $V_n = f(u_n)$

a- Vérifier que la suite (V_n) est bien définie et déterminer v_0.

b)Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique puis déduire l'expression de v_n en fonction de n et v_0.

c)M alors que $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n}\right]$

Exercice 14:

A) Soit f la fonction définie sur IR*+ par : $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$

1) Etudier les variations de f.

2) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé.

3)a)Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

b) Calculer l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations : x =1, x = e et y = 0.

B) Soit $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$; x > 0

1) Soit x $\in$[1, +∞[

a)Montrer que pour tout t $\in$[x, 2x], $0 \leq f(t) \leq \frac{(\ln 2x)^2}{t^2}$

b) En déduire que $0 \leq F(x) \leq \frac{(\ln 2x)^2}{2x}$

c)En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

2) Soit x$\in$]0, $\frac{1}{2}$]

a)Montrer que $\frac{(\ln 2x)^2}{2x} \leq F(x)$

b) En déduire $\lim_{x\to0} F(x)$

3)a)Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et que

$$F'(x) = \frac{(\ln(2x))^2 - 2(\ln x)^2}{2x^2}$$

b) Dresser le tableau de variations de F.

Exercice 2:(6 points)

Soit f la fonction définie sur]0, +∞ [par : f(x) = x +ln(x) et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$).

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de]0, +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera puis dresser le tableau de variations de la fonction réciproque f^{-1}.

3) Calculer f(1) et f(e) puis construire C et C' la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère ($O,\vec{i},\vec{j}$).

4) a) Calculer $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$.

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C' et les droites :

x =1, x = 1 + e et y = x.

5) Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'équation : (E) : x + ln(x) = n.

a) Montrer que (E) admet une seule solution x_n.

b) Déterminer la valeur de x_1 puis déterminer la limite de x_n.

Exercice 16 :

A) Soit g la fonction définie sur]0 , +∞[par :
g(x) = x +(x - 2)lnx.
1)a- Montrer que pour tout réel x > 0,
$g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x$.
b- En déduire que pour tout réel x > 1, g'(x) > 0.
2)a- Dresser le tableau de variation de g.
b- En déduire que pour tout réel x > 0, g(x) ≥ 1.
B) Soit f la fonction définie sur]0 , +∞[par :
f(x) = 1 + xlnx – (lnx)².
On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, , $\vec{j}$) (unité 2 cm)
1)a- Montrer que pour tout réel x > 0, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
b- Dresser le tableau de variation de f.
2)a- Écrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
b- Montrer que pour tout x > 0 , x – 1 – lnx ≥ 0.
c- Étudier alors la position de C par rapport à T.
3)a- Montrer que f réalise une bijection de]0 , +∞[dans IR.
On désigne par C ' la courbe de la réciproque de f.
b- Tracer, dans le même repère, les courbes C et C '.

Exercice 17:

Soit f la fonction définie sur $I = \left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue en 0.
2°) Soit a un réel non nul de l'intervalle I.
On considère la fonction g_a définie sur I par :
$g_a(x) = [\ln(2a + 1) – 2a].x^2 - [\ln(2x+1) – 2x].a^2$
a)Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe un réel b compris entre 0 et a tel que
$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$.
b)En déduire que f est dérivable en 0 et que f '(0) = - 2
3°) Soit φ la fonction définie sur I par :
φ(x) = 2x – (1 + 2x)ln(1 + 2x).
a) Etudier les variations de φ.
b)En déduire que pour tout réel non nul x de I, φ(x) < 0.
4°)a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Mque f réalise une bijection de I sur]0 , + ∞[.
c) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C et C ' respectives de f et de sa réciproque f^{-1}

Exercice 18 :

1) On considère la fonction f_1 définie sur [0 ; + ∞[par $f_1(x) = 2x − 2 + \ln(x^2 + 1)$.
a) Déterminer la limite de f_1 en + ∞.
b) Déterminer la dérivée de f_1 .
c) Dresser le tableau de variations de f_1 .
2) Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur [0 ; + ∞ [par
$f_n(x) = 2x − 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$
a)Déterminer la limite de f n en +∞.
b)Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.
c)Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n sur [0 ; + ∞ [.
d)Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < a_n < 1$.
3)Mque pour tout entier naturel non nul n, $f_n(a_{n+1}) > 0$.
4) Étude de la suite (a_n)
a)Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b)En déduire qu'elle est convergente.

c)Utiliser l'expression $a_n = 1 - \frac{\ln(1+a_n)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Exercice 19 : (6 points)

1) Soit f la fonction numérique définie sur IR par

$f(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que le point I(1, 0) est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

2) Soit n un entier naturel non nul et (u_n) la suite réelle définie sur IN par :

$u_0 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}\,dt$ et

$u_n = \int_0^2 \frac{(t-1)^{2n}}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}\,dt$, si n>0 .

Soit $I = \int_0^2 \sqrt{t^2 - 2t + 2}\,dt$.

a) Calculer u_0.

b) Montrer que $u_0 + u_1 = I$.

c) Montrer que $u_1 + I = 2\sqrt{2}$.

d) En déduire u_1.

e) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$\frac{\sqrt{2}}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{2}{2n+1}$.

f) En déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$.

Exercice 20 :

I/ On considère la fonction g définie sur $]0.+\infty[$ par $g(x) = -2\ln x - 2x + 1$

1)Dresser le tableau de variation de g

2)Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $\propto$, vérifier que $\propto \epsilon]0.5\,,1[$

3)En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

II/ On considère la fonction f définie sur $]0.+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+\ln x}{x^2}$

On donne ci-dessous la représentation graphique C de f dans un repère orthonormé

T est la tangente à C au point d'abscisse 1

1) a) Par une lecture graphique , déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-2}{x-1}$

a) Donner un encadrement de f sur [1,3]

2) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3) Dresser le tableau de variation de f

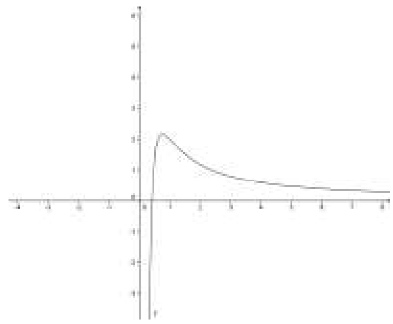
4) Soit $\int_{2^n}^{2^{n+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2}\right) dt$ et $A_n = \int_{2^n}^{2^{n+1}} f(t)\,dt$

a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $I_n = \frac{\ln 2^{n-1} + 1}{2^{n+1}}$

b)Montrer que $A_n = I_n + 2\ln 2$

c)Donner une interprétation géométrique de A_0

d)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$



Exercice 21 :

Soit F la fonction définie sur IR* par

$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.

1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout x > 0, on pose $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.

a/ Vérifier que F(x) = g(2x) – g(x) ; pour tout x > 0.

b/ Montrer que g est dérivable sur IR*+ puis calculer F'(x) pour tout x > 0.

c/ En Déduire le sens de variations de F sur]0, +∞[.

3) a/ Montrer que pour tout x > 0, il existe un réel c ∈] x, 2x [tel que $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$.

b/ Déduire que, pour tout x > 0 ; $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

c/ Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$.

4) a/ Dresser le tableau de variations de F.

b/ Tracer l'allure de la courbe C de F dans un repère orthonormé. (On donne $F(\sqrt{2}) \cong 0.7$)