

Exercice 1

A/ Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

- ① Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- ② a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

B/ Dans cette partie on se propose de calculer la limite L de la suite (u_n) .

Soit $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_0^\alpha \sin^n(x) dx$ et $w_n = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

- ① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \alpha \sin^n(\alpha)$.
- ② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq w_n \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$.
- ③ En déduire que $0 \leq L \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$.
- ④ Supposons que $L > 0$.
a) Soit $\alpha_0 \in \left] \frac{\pi}{2} - L, \frac{\pi}{2} \right[$, utiliser la question ③ pour comparer α_0 et $\frac{\pi}{2} - L$.
b) Conclure.

Exercice 2

I/ On considère la fonction g définie sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ par $g(x) = \tan x$.

- 1) Montrer que g réalise une bijection de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) Soit h la fonction réciproque de g . Montrer que h est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer $h'(x)$.

II/ Soit $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} & \text{si } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\\ f_n(0) = 2(n+1) \end{cases}$$

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$.

- 1) Montrer que (U_n) est bien définie.
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. Calculer U_0, U_1 et U_2 .
b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
- 3) a) Calculer $\int_0^1 dx$ et $\int_0^1 x^{2k} dx$, $k \in \mathbb{N}^*$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n , $U_n = 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$.
c) Montrer que pour tout entier naturel n , $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| \leq \frac{2}{2n+3}$.
d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

NB : On donne la forme trig

$$\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

