Lycée pilote de Tunis	**Calcul intégrales 1**	*Terminales maths*
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-1)dx$; b) $\int_{0}^{3}\frac{5}{\sqrt{2x+3}}dx$; c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx\,cosx}{(cos^2x+1)^2}dx$; d) $\int_{-2}^{0}(2x^3-x+1)dx$; e) $\int_{1}^{2}\frac{2}{(3u-1)^2}du$;

f) $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$; g) $\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt$; h) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+2x)^2}dx$; i) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+tan^2\left(\frac{u}{2}\right)du$; j) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}sinx\,cos^3x\,dx$.

2. En intégrant par parties Calculer les intégrales : $a)\int_0^1 t^2 sint\,dt$; $b)\int_0^1\frac{z}{\sqrt{z+1}}dz$

$c)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\,sin(3x)\,dx$; $d)\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$

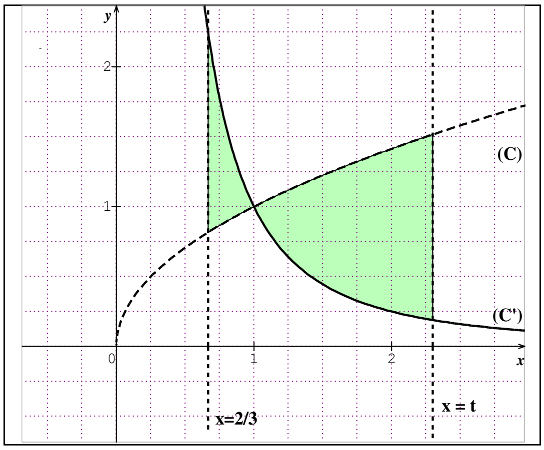
3. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ et $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs fonctions dérivées.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, l'intégrale $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

Exercice 2

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé les courbes des fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{1}{x^2}$ et $g(x)=\sqrt{x}$.



1. Calculer l'aire A du domaine limité par les deux courbes , les droites d'équations $x=\frac{2}{3}$ et $x=1$.

2. Soit t un réel strictement supérieur à 1 et a_t l'aire du domaine limité par les deux courbes, les droites $x = 1$ et $x = t$.

Peut-on trouver t tel que $a_t = A$? Expliquer.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie pour $n\geq 1$, par : $u_n=\int_0^1\frac{1}{x^n+1}dx$.

1. Calculer $\int_0^1 1\,dx$ puis établir que pour $n\geq 1$: $1-u_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^n+1}dx$

2. Montrer que pour $n\geq 1$: $0\leq 1-u_n\leq\frac{1}{n+1}$.

3. Déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 4

Soit un entier naturel non nul n.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n=n\int_1^{\pi}\frac{sinx}{x^n}dx$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $u_n = \frac{n}{n-1}\left(sin1 + \int_1^{\pi} \frac{cosx}{x^{n-1}} dx \right)$

2. Démontrer que $\left| \int_1^{\pi} \frac{cosx}{x^{n-1}} dx \right| \leq \int_1^{\pi} \frac{dx}{x^{n-1}} dx$

3. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_1^{\pi} \frac{cosx}{x^{n-1}} dx \right) = 0$.

   Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 5

On considère la suite u définie sur ℕ par : $u_n = \int_0^1 x^{2n+1} sin(\pi x)\, dx$.

1. Montrer que $u_0 = \frac{1}{\pi}$.

2. Montrer que la suite u est décroissante.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$. Déduire la limite de u.

4. A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que pour tout naturel n on a :

   $$u_{n+1} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2n+2)(2n+3)}{\pi^2} u_n$$

5. Calculer alors l'intégrale $I = \int_0^1 \left(x^3 + 2x + 1 \right) sin(\pi x)\, dx$.

Exercice 6

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\ dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

3. Montrer que pour tout naturel n on a :

   $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ .Déduire la limite de (I_n).

   Montrer que pour tout $t \in [0,1]$; $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$. En déduire la limite de la suite (nI_n) .

Exercice 7

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\pi} cos^4(x)\, dx$ et $J = \int_0^{\pi} sin^4(x)\, dx$.

1. a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosx\, sin^2x)\, dx$.

   b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer

   que : $I = \int_0^{\pi} sin^2x dx - \frac{1}{3} J$

   c) Montrer de même que : $J = \int_0^{\pi} cos^2x dx - \frac{1}{3} I$

2. a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

   b) Montrer que J - I = 0. En déduire les intégrales I et J.

Exercice 8

Soit la suite (I_n) définie sur ℕ par : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour n naturel non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, dx$.

1. a) Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.

   b) En déduire que : Pour tout naturel $n \geq 1$, $n I_n^2 \leq n I_n I_{n-1} \leq n I_{n-1}^2$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   A l'aide d'une intégration par parties démontrer que $(n+1) I_{n+1} = n I_{n-1}$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$, $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

4. Démontrer que pour tout naturel n, $I_n \succ 0$.

5. a) Démontrer que pour tout naturel $n \geq 1$, $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

   b) Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_n$.

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\, dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in$ ℕ on a : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2(n+1)}$. En déduire u_1 et u_2 en fonction de u_0

2. a) Montrer que (u_n) est décroissant et positive. Déduire que (u_n) est convergente.

   b) Montrer que $u_n \leq \frac{1}{2n+2}$. Calculer alors la limite de (u_n).

3. a) Justifier que pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-1}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in$ ℕ* : $\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{4n}$. En déduire la convergence de la suite $(n u_n)$.

4. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(k+1)}$.

   a) Montrer que $(-1)^{n+1} u_{n+1} = u_0 - v_n$.

   b) Déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 2

Les fonctions carrées et racines étant continues sur $\left[\frac{2}{3},1\right]$ et pour $x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$, $\frac{1}{x^2}\geq\sqrt{x}$ donc

$$A=\int_{\frac{2}{3}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-\sqrt{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{\frac{2}{3}}^{1}=\left(-1-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{2}-\frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Pour $x\geq 1$, $\sqrt{x}\geq\frac{1}{x^2}$ donc $a(t)=\int_1^t\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right]_1^t=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+\frac{1}{t}-\frac{5}{3}$.

La fonction a étant dérivable sur $[1,+\infty[$ et $a'(t)=\sqrt{t}-\frac{1}{t^2}\geq 0$. La fonction a étant strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $\left[a(1),\lim\limits_{t\to+\infty}a(t)\right[=[0,+\infty[$.

$A\in a\langle[1,+\infty[\rangle$ donc il existe t unique dans $[1,+\infty[$ tel que $a(t)=A$.

Exercice 3

1. $\int_0^1 dx=[x]_0^1=1$.

   $$1-u_n=\int_0^1\frac{1}{x^n+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x^n+1}dx=\int_0^1 1-\frac{1}{x^n+1}dx=\int_0^1\frac{x^n}{x^n+1}dx$$

2. $n\geq 1,\ 0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 0\leq x^n\leq 1\Leftrightarrow 1\leq 1+x^n\leq 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^n}\leq 1\Leftrightarrow\frac{x^n}{2}\leq\frac{x^n}{1+x^n}\leq x^n\Rightarrow 0\leq\frac{x^n}{1+x^n}\leq x^n$.

   On a : $0\leq\frac{x^n}{1+x^n}\leq x^n$ et les fonctions étant continues sur $[0,1]$ donc par intégration sur $[0,1]$ on aura :

   $$0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\leq\int_0^1 x^n dx\Leftrightarrow 0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\leq\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

   Ainsi pour tout pour $n\geq 1$: $0\leq 1-u_n\leq\frac{1}{n+1}$.

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc par comparaison (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Exercice 4

Intégrons par parties l'intégrale : $\int_1^\pi\frac{sinx}{x^n}dx$

On pose : $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x^n}\\ v(x)=sinx\end{cases}$ $\quad\begin{cases}u(x)=\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\\ v'(x)=cosx\end{cases}$

Les quatre fonctions étant continues sur $[1,\pi]$ alors par le théorème d'intégration par parties :

$$\int_1^\pi\frac{sinx}{x^n}dx=\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}sinx\right]_1^\pi+\frac{1}{(n-1)}\int_1^\pi\frac{cosx}{x^{n-1}}dx=\frac{1}{(n-1)}sin(1)+\frac{1}{(n-1)}\int_1^\pi\frac{cosx}{x^{n-1}}dx$$

$=\frac{1}{(n-1)}\left(sin(1)+\int_1^\pi\frac{cosx}{x^{n-1}}dx\right)$ et donc $u_n=\frac{n}{n-1}\left(sin1+\int_1^\pi\frac{cosx}{x^{n-1}}dx\right)$.

$$\left|\int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}}dx\right| \le \int_1^\pi \left|\frac{\cos x}{x^{n-1}}\right|dx = \int_1^\pi \frac{1}{x^{n-1}}|\cos x|\,dx \le \int_1^\pi \frac{dx}{x^{n-1}}$$ en effet $|\cos x| \le 1$ pour tout x réel.

$$\int_1^\pi \frac{dx}{x^{n-1}}dx = \left[-\frac{1}{(n-2)x^{n-2}}\right]_1^\pi = -\frac{1}{(n-2)(\pi)^{n-2}} + \frac{1}{(n-2)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{(n-2)(\pi)^{n-2}} + \frac{1}{(n-2)} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left(\int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}}dx\right) = 0$$ **(résultat de cours).**

Du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sin(1)$

Exercice 5

1. $u_0 = \int_0^1 x\sin(\pi x)\,dx$

   Intégrons par parties :

   On pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(\pi x) \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \end{cases}$

   Les quatre fonctions étant continues sur $[0,1]$ alors par le théorème d'intégration par parties, on peut écrire :

   $$u_0 = \int_0^1 x\sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{x}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

2. Montrons que la suite u est décroissante.

   $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{2n+3}\sin(\pi x)\,dx - \int_0^1 x^{2n+1}\sin(\pi x)\,dx = \int_0^1 x^{2n+1}\sin(\pi x)\left(x^2-1\right)dx$. D'après la linéarité de l'intégrale.

   Or $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le \pi x \le \pi$ et donc $\sin(\pi x) \ge 0$ et aussi $x^2 - 1 \le 0$ et donc $x^{2n+1}\sin(\pi x)\left(x^2-1\right) \le 0$ pour x réel de $[0,1]$. La suite u est donc décroissante.

3. On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le \pi x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \sin(\pi x) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^{2n+1}\sin(\pi x) \le x^{2n+1}$ car $x \in [0,1]$ donc $x^{2n+1} \ge 0$.

   Les trois dernières fonctions étant continues sur $[0,1]$ donc d'après la positivité de l'intégrale on a :

   $0 \le \int_0^1 x^{2n+1}\sin(\pi x)\,dx \le \int_0^1 x^{2n+1}dx$ et comme $\int_0^1 x^{2n+1}dx = \left[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \le u_n \le \frac{1}{2(n+1)}$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. $u_{n+1} = \int_0^1 x^{2n+3}\sin(\pi x)\,dx$.

   Intégrons par parties :

   On pose : $\begin{cases} u(x) = x^{2n+3} \\ v'(x) = \sin(\pi x) \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = (2n+3)x^{2n+2} \\ v(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \end{cases}$

   Les quatre fonctions étant continues sur $[0,1]$ alors par le théorème d'intégration par parties, on peut écrire :

$$u_{n+1}=\int_0^1 x^{2n+3}sin(\pi x)\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}cos(\pi x)x^{2n+3}\right]_0^1+\frac{1}{\pi}(2n+3)\int_0^1 cos(\pi x)x^{2n+2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}(2n+3)\int_0^1 cos(\pi x)x^{2n+2}dx.$$

Intégrons une deuxième fois par parties l'intégrale $\int_0^1 cos(\pi x)x^{2n+2}dx$

On pose : $\begin{cases} u(x)=x^{2n+2} \\ v'(x)=cos(\pi x)\end{cases}$ $\begin{cases} u'(x)=(2n+2)x^{2n+1} \\ v(x)=\frac{1}{\pi}sin(\pi x)\end{cases}$

Les quatre fonctions étant continues sur $[0,1]$ alors par le théorème d'intégration par parties, on peut écrire :

$\int_0^1 cos(\pi x)x^{2n+2}dx=\left[\frac{1}{\pi}sin(\pi x)x^{2n+2}\right]_0^1-\frac{1}{\pi}(2n+2)\int_0^1 sin(\pi x)x^{2n+1}dx$ et donc après calcul :

$\int_0^1 cos(\pi x)x^{2n+2}dx=0-\frac{1}{\pi}(2n+2)u_n$ et $u_{n+1}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}(2n+3)\left(-\frac{1}{\pi}(2n+2)u_n\right)$ soit encore

$$u_{n+1}=\frac{1}{\pi}-\frac{(2n+2)(2n+3)}{\pi^2}u_n.$$

5. $I=\int_0^1(x^3+2x+1)sin(\pi x)\,dx=\int_0^1 x^3 sin(\pi x)\,dx+2\int_0^1 x\,sin(\pi x)\,dx+\int_0^1 sin(\pi x)\,dx$ ou encore que

$I=u_1+2u_0+\int_0^1 sin(\pi x)\,dx$. Or

$u_0=\frac{1}{\pi}$, $u_1=u_{0+1}=\frac{1}{\pi}-\frac{(0+2)(0+3)}{\pi^2}u_0=\frac{1}{\pi}-\frac{6}{\pi^2}\times\frac{1}{\pi}=\frac{\pi^2-6}{\pi^3}$ et

$\int_0^1 sin(\pi x)\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}cos(\pi x)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$. Finalement $I=\frac{\pi^2-6}{\pi^3}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}=\frac{5\pi^2-6}{\pi^3}$.

Exercice 6

1. $I_0=\int_0^1\sqrt{1+t}\;dt=\left[\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

Intégrons par parties $I_1=\int_0^1 t\sqrt{1+t}dt$

On pose : $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\sqrt{1+t}\end{cases}$ $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\end{cases}$

Les quatre fonctions étant continues sur $[0,1]$ alors par le théorème d'intégration par parties, on peut écrire :

$I_1=\int_0^1 t\sqrt{1+t}dt=\left[\frac{2}{3}t(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1(1+t)\sqrt{1+t}dt$ soit encore

$I_1=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\left[\int_0^1\left(\sqrt{1+t}+t\sqrt{1+t}\right)dt\right]=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\left[\int_0^1\sqrt{1+t}dt+I_1\right]$ et donc $\frac{5}{3}I_1=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\int_0^1\sqrt{1+t}dt$ ou encore

$\frac{5}{3}I_1=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\Leftrightarrow 5I_1=4\sqrt{2}-\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$ … achever les calculs.

2. Montrons que la suite (I_n) est décroissante.

$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}dt-\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}dt=\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}(t-1)dt$ et pour tout réel t de $[0,1]$ $t^n\sqrt{1+t}(t-1)\leq 0$ il en est de même de $I_{n+1}-I_n$ et la suite (I_n) est décroissante.

3. On a pour tout réel t de $[0,1]$: $1\le\sqrt{1+t}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow t^n\le t^n\sqrt{1+t}\le t^n\sqrt{2}$

Les trois dernières fonctions étant continues sur $[0,1]$ donc d'après la positivité de l'intégrale on peut écrire

$\int_0^1 t^n dt\le\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}dt\le\sqrt{2}\int_0^1 t^n dt$ et comme $\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$ on en déduit que

$\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ le théorème de comparaison permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

4. Montrons que pour tout $t\in[0,1]$; $0\le\sqrt{2}-\sqrt{1+t}\le\frac{1}{2}(1-t)$.

Idée : Comparer les dérivées puis intégrer

On a pour $t\in[0,1]$; $0\le\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\le\frac{1}{2}$ (facile à vérifier) et la fonction $t\mapsto\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$ est continue sur $[0,1]$ donc

d'après la positivité de l'intégrale, on a : pour tout $t\in[0,1]$;

$$0\le\int_t^1\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx\le\int_t^1\frac{1}{2}dx\Leftrightarrow 0\le\left[\sqrt{1+x}\right]_t^1\le\frac{1}{2}(1-t)$$

$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{2}-\sqrt{1+t}\le\frac{1}{2}(1-t)$. C'est le résultat. Bien sur il ya d'autre méthodes …accroissements finis par exemple.

$t\in[0,1]$ donc $t^n\ge 0$ et donc l'inégalité $0\le\sqrt{2}-\sqrt{1+t}\le\frac{1}{2}(1-t)$ devient $-\frac{1}{2}(1-t)+\sqrt{2}\le\sqrt{1+t}\le\sqrt{2}$ et on multiplions par $t^n\ge0$, $t\in[0,1]$ on obtient $-\frac{1}{2}\left(t^n-t^{n+1}\right)+t^n\sqrt{2}\le t^n\sqrt{1+t}\le t^n\sqrt{2}$.

Toutes les fonctions sont continues sur $[0,1]$ donc d'après la positivité de l'intégrale,

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(t^n-t^{n+1}\right)dt+\int_0^1 t^n\sqrt{2}\,dt\le\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}dt\le\int_0^1 t^n\sqrt{2}dt$$

En tenant compte du fait que $\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$, on obtient

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et donc en multiplions par $n\ge0$, on obtient

$-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+2}\right)+\frac{n\sqrt{2}}{n+1}\le nI_n\le\frac{n\sqrt{2}}{n+1}$ et le théorème de comparaison permet de conclure que

$\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\sqrt{2}$.

Exercice 7

1. a) $cosx(cosx-cosx\,sin^2x)=cos^2x-cos^2x\,sin^2x=cos^2x\left(1-sin^2x\right)=cos^4x$. Donc

$$I=\int_0^\pi cosx(cosx-cosx\,sin^2x)\,dx$$

b) Intégrons par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = cosx \\ v'(x) = cosx - cosx\, sin^2 x \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} u'(x) = -sinx \\ v(x) = sinx - \dfrac{sin^3 x}{3} \end{cases}$

Les quatre fonctions étant continues sur $[0,\pi]$ alors par le théorème d'intégration par parties, on peut écrire :

$I = \left[cosx\left(sinx - \dfrac{sin^3 x}{3} \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi sin^2 x dx - \dfrac{1}{3} J$ bien sur en tenant compte de la linéarité de l'intégrale.

donc $I = \int_0^\pi sin^2 x dx - \dfrac{1}{3} J$ car $\left[cosx\left(sinx - \dfrac{sin^3 x}{3} \right) \right]_0^\pi = 0$.

c) On a aussi : $sinx(sinx - sinx\, cos^2 x) = sin^2 x - cos^2 x\, sin^2 x = sin^2 x\left(1 - cos^2 x\right) = sin^4 x$.

Donc $\quad J = \int_0^\pi sin^4(x)\, dx = \int_0^\pi sinx(sinx - sinx\, cos^2 x)\, dx$.

Intégrons toujours par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = sinx \\ v'(x) = sinx - cos^2 x\, sinx \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} u'(x) = cosx \\ v(x) = -cosx + \dfrac{cos^3 x}{3} \end{cases}$

Les quatre fonctions étant continues sur $[0,\pi]$ alors par le théorème d'intégration par parties, on peut écrire

$J = \left[sinx\left(-cosx + \dfrac{cos^3 x}{3} \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi cos^2 x dx - \dfrac{1}{3} I$.

donc : $J = \int_0^\pi cos^2 x dx - \dfrac{1}{3} I$.

2. a) $I + J = \int_0^\pi sin^2 x dx - \dfrac{1}{3} J + \int_0^\pi cos^2 x dx - \dfrac{1}{3} I = \int_0^\pi \left(sin^2 x + cos^2 x \right) dx - \dfrac{1}{3}(I + J)$ et comme

$\int_0^\pi \left(sin^2 x + cos^2 x \right) dx = \pi$ on aura donc $I + J = \pi - \dfrac{1}{3}(I + J) \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}(I + J) = \pi \Leftrightarrow I + J = \dfrac{3\pi}{4}$.

b) Aussi $J - I = \int_0^\pi cos^2 x dx - \dfrac{1}{3} I - \int_0^\pi sin^2 x dx + \dfrac{1}{3} J = \int_0^\pi \left(cos^2 x - sin^2 x \right) dx + \dfrac{1}{3}(J - I)$.

Or $\int_0^\pi \left(cos^2 x - sin^2 x \right) dx = \int_0^\pi cos(2x)\, dx = \left[\dfrac{1}{2} sin(2x) \right]_0^\pi = 0$, on aura donc

$J - I = \dfrac{1}{3}(J - I) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}(J - I) = 0 \Leftrightarrow J = I$. On a finalement $I + J = \dfrac{3\pi}{4}$ et $I = J$ donc $I = J = \dfrac{3\pi}{8}$.

Exercice 8

1. a) Pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $sinx \geq 0$ donc il en est de même de $sin^n x$ et par suite $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, dx \geq 0$.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+1} x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\left(sinx - 1 \right) dx$ d'après la linéarité de l'intégrale.

Et on a pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq sinx \leq 1 \Rightarrow sinx - 1 \leq 0$ et $sin^n x \geq 0$ donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

b) On a la suite (I_n) est décroissante donc pour $n \geq 1$, $I_n^2 \leq I_n\, I_{n-1} \Leftrightarrow nI_n^2 \leq nI_n\, I_{n-1}$. On a aussi

$I_n \leq I_{n-1} \Leftrightarrow nI_n\ I_{n-1} \leq n\,I_{n-1}^2$ et donc pour tout naturel $n \geq 1$, $n\,I_n^2 \leq nI_n\, I_{n-1} \leq n\,I_{n-1}^2$.

2. $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+1}x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\, sin^n x\, dx$

Intégrons par parties :

On pose : $\begin{cases} u(x) = sin^n x \\ v'(x) = sinx \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = n\,cosx\, sin^{n-1}x \\ v(x) = -cosx \end{cases}$

Les quatre fonctions étant continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors par le théorème d'intégration par parties, on peut écrire

$$I_{n+1} = \left[sin^n x(-cosx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1}xcos^2xdx$$

$$I_{n+1} = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1}x\left(1 - sin^2 x\right)dx = n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^{n-1}x - sin^{n+1}x\right)dx = nI_{n-1} - nI_{n+1}.$$

Donc $I_{n+1} = nI_{n-1} - nI_{n+1} \Leftrightarrow (n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$ c'est le résultat demandé.

3. Démontrons par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$, $n\,I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

Calculons $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\, dx = [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

pour $n = 1$, $I_1 \times I_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ donc vrai pour $n = 1$.

Supposons pour $n \geq 1$, $n\,I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ et démontrons que $(n+1)I_{n+1}\, I_n = \frac{\pi}{2}$.

On a : $n \geq 1$, $n\,I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n\,I_n \times \frac{n+1}{n} I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (n+1)I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ c'est le résultat .

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $n\,I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

4. Démontrons que pour tout naturel n, $I_n \succ 0$.

La fonction $x \mapsto sin^n x$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et s'annule uniquement pour $x = 0$ et on a $\frac{\pi}{2} \succ 0$ donc pour tout naturel n, $I_n \succ 0$.

5. a) Démontrer que pour tout naturel $n \geq 1$ $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

On a pour $n \geq 1$, $n\,I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ et la suite (I_n) est strictement positive et décroissante.

On a d'une part :

$$nI_n^2 \leq n\,I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n} \Leftrightarrow I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

D'autre part :

Pour tout $n \geq 1$, $n\,I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq n\ I_{n-1}^2 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2n} \leq I_{n-1}^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq I_{n-1}$ et donc $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n$.

Conclusion pour tout naturel $n \geq 1$ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

b) On a pour tout naturel $n \geq 1$ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et on multipliant par $\sqrt{n} \succ 0$, on obtient :

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(n+1)}} \leq \sqrt{n} \times I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\pi}{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n\pi}{2(n+1)}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Donc par comparaison la suite $\left(\sqrt{n}\, I_n\right)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 9

1. La linéarité de l'intégrale permet d'écrire : $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2+1)}{1+x^2}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}\,dx = \left[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$.

$u_1 + u_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{2} - u_0 \ldots$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a $\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geq 0$ donc la suite (u_n) est a termes positives.

$u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{1+x^2}\,dx$ (Linéarité de l'intégrale)

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a $\dfrac{x^{2n+1}(x^2-1)}{1+x^2} \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

b) On a : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ alors $u_n \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2(n+1)} = 0$ alors par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. a) Résultat immédiat compte tenu du faite que (u_n) est décroissante donc $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1}$.

b) pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-1}$ .D'après la question1. $\dfrac{1}{2n+2} \leq 2u_n \leq \dfrac{1}{2n} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{4n+4} \leq u_n \leq \dfrac{1}{4n}$.

La double inégalité $\dfrac{1}{4n+4} \leq u_n \leq \dfrac{1}{4n}$ devient en multipliant par n : $\dfrac{n}{4n+4} \leq nu_n \leq \dfrac{1}{4}$ et comme

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{4n+4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4+\dfrac{4}{n}} = \dfrac{1}{4}$ alors par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \dfrac{1}{4}$.

4. **a) Réponse 1 :**

$v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (u_{k+1} + u_k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ et le changement de variable $p = k+1$ nous permet la nouvelle écriture

$$v_n=\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^{p-1}u_p-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}u_k=(-1)^n u_{n+1}+\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}u_p-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k-u_0\right)=(-1)^n u_{n+1}+u_0$$

après simplification. D'où $(-1)^{n+1}u_{n+1}=u_0-v_n$.

Réponse 2:

Remarquons que $\int_0^1 x^{2k+1}dx=\dfrac{1}{2k+2}$

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{2k+1}dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k\,x\times\left(x^2\right)^k dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x\times\left(-x^2\right)^k dx$$

$=\int_0^1 x\times\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k\right)dx$. Or $\sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\left(-x^2\right)\neq 1$ donc elle vaut $\dfrac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2}=\dfrac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$. Ainsi

$$v_n=\int_0^1 x\times\frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x-(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{2n+3}}{1+x^2}dx.$$

Finalement $v_n=u_0-(-1)^{n+1}u_{n+1}$.

b) On a : $v_n-u_0=-(-1)^{n+1}u_{n+1}\Rightarrow\left|v_n-u_0\right|=u_{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=0$ alors par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=u_0=ln2$.