Lycée Pilote Sfax A/S : 2019-2020	**Série N°21** (Primitives)	$4^{\text{ème}}$ Math Mr Jellali

Exercice 1

Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2\left(x^3-3x\right)^4-\left(x^3-3x\right)^4$; $I=\mathbb{R}$.

2) $f : x \mapsto \dfrac{-x}{(x+2)^4}$; $I=]-2,+\infty[$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$; $I=\mathbb{R}_+^*$.

4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3}$; $I=\mathbb{R}_+^*$.

5) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$; $I=\mathbb{R}$.

6) $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{\left(\sqrt[4]{x^5+1}\right)^3}$; $I=\mathbb{R}_+$.

7) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $I=\mathbb{R}_+^*$.

8) $f : x \mapsto x^2(x-1)^{2021}$; $I=\mathbb{R}$.

9) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\tan^4 x}+\dfrac{1}{\tan^2 x}$; $I=\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

10) $f : x \mapsto \tan^4 x$; $I=\left[0,+\dfrac{\pi}{2}\right[$

11) $f : x \mapsto \sin x+\cos^2 x$; $I=\mathbb{R}$

12) $f : x \mapsto \sin^2 x\cos^3 x$; $I=\mathbb{R}$

13) $f : x \mapsto \sin^5 x$; $I=\mathbb{R}$

14) $f : x \mapsto \cos^4 x$; $I=\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

On désigne par F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$.

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)\le x$.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $F(x)\ge\dfrac{2}{3}x$.

3) Dresser le tableau de variation de F.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1) Montrer que F est impaire.

2)a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $F(x)\le x$.

b) Soit φ la fonction définie $[1,+\infty[$ par $\varphi(x)=F(x)+\dfrac{1}{x}$.

Etudier le sens de variation de φ . En déduire que F est majorée sur $[1,+\infty[$.

c) Montrer que F admet une limite finie L en $+\infty$.

3) On pose $g(x)=F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et Calculer $g'(x)$. En déduire que $L=2F(1)$.

4) On pose $h(x)=\tan x$ pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F\circ h(x)=x$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F\circ h(x)=L$. En déduire la valeur de L puis la valeur de F(1).

c) Tracer la courbe de F dan un