Exercice1 : Répondre par vrai ou faux
1)Toute primitive d'une fonction paire est une fonction impaire.
2)Toute primitive d'une fonction impaire est une fonction paire.

Exercice 2 : Donner les bonnes réponses.
Soit f une fonction définie sur IR et F la primitive de f qui vérifie F (0) = 2.
1) La primitive G de la fonction $x \to f(2x)$ qui vérifie G (0) = 2 est telle que G(x) est égal à :

a) F(2x) + 1 b) $\frac{1}{2}F(2x) + 1$ c) $\frac{1}{2}F(2x)$

2) La primitive H de la fonction $x \to f(x+2)$ qui vérifie H (0) = 2 est la fonction :

a) $x \to F(x+2)$ b) $x \to F(\frac{x^2}{2}+x)$ c) $x \to F(x+2) + 2 - F(2)$

3) La primitive J de la fonction $x \to f(x) + 2$ qui vérifie J (0) = 2 est la fonction :
a) $x \to 2 + F(x)$ b) $x \to 2x + F(x)$ c) $x \to F(x)$

Exercice 3:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$f(x) = x(x^2+1)^4$, $f(x) = \tan x + (\tan x)^3$, $f(x) = \cos^3 x$; $f(x) = (\cos x)^2 (\sin x)^3$.;
$f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$; $f(x) = \sin 2x \cos 3x$; $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$;
$f(x) = \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$, $f(x) = x^2\sqrt{x-1}$, $f(x) = x\cos(x^2)$, $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$

Exercice 4:

Soit $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.
a/ Montrer que h admet une primitive H sur [-2, 2] vérifiant H (0) = 0.
b/ Soit g (x) = H (2cosx), $x \in [0, \pi]$.
Montrer que g est dérivable sur $[0, \pi]$ et que $g'(x) = -4\sin^2 x$.

Calculer $g(\frac{\pi}{2})$ puis déduire g (x).

Exercice 5:
Déterminer les primitives des fonctions f (x) = x cosx et g (x) = x sinx,
après avoir calculé leurs … dérivées.

Exercice 6:
h étant la primitive définie sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
1) Etudier les variations de h et déduire que h est une bijection.
2) Déduire le signe de h (x) sur $]0, +\infty[$.
3) G la fonction définie sur IR*+ par : G (x) = h (ax), où $a \in$ IR*+.
Montrer que G est une primitive de f .
4) Déduire que $\forall x > 0$ et $y > 0$,

a/ h (x y) = h(y) + h (x). b/ $h(\frac{1}{x}) = -h(x)$; c/ $h(\frac{x}{y}) = h(x) - h(y)$.

Exercice 7:

On considère la fonction f définie sur R par :$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et F désigne la primitive de f qui vérifie F(0) = 0 .
1) Démontrer que F est une fonction impaire
2)on pose $\forall \epsilon]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ h(x)= F(tan(x))
a) justifier que h est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée
b)Conclure que l'on a F(tan(x)) = x
c) en déduire la valeur exacte de $F(\frac{1}{\sqrt{3}})$ et de F(1)

3) on pose G(x) = F(x) + F($\frac{1}{x}$)

a) calculer sa dérivé

b) En déduire que F(x) = $\frac{\pi}{2}$ - F($\frac{1}{x}$)

c) Que vaut F($\sqrt{3}$) ?

d) Déterminer la limite de F(x) l'orque x tend vers $+\infty$

4)Déterminer le sens de variation de F puis dresser son tableau de variation

5)On note T la tangente a C au point d'abscisse 0.

a)Déterminer l'équation réduite de T.

b)Etudier la position de C par rapport a sa tangente T au point 0.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;+ ∞ [par : f(x) =$\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f

2) Soit F la primitive de f sur [0;+∞[qui s'annule en 0. Déterminer le sens de variation de F sur [0;+∞[.

3) On définit sur [0;+∞[les fonctions H et K par : H(x) = F(x) − x, et K(x) = F(x) $-\frac{2}{3}x$

a) Etudier sur [0;+∞[les variations de H et K.

b) Montrer que, pour tout x ≥ 0, $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$

c) En déduire la limite .

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par : f(x) = $\frac{-2}{1+(x-1)^2}$ et F sa primitive sur $]-\infty,1]$ qui s'annule en 1.

1) Montrer que F est une bijection.

2) On désigne par G la fonction définie sur $[0,\pi[$ par : G(x) = $F\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi[$ et calculer G' (x).

b) Déterminer G (x) pour tout x $\in [0,\pi[$ puis calculer F (0). En déduire $\int_0^1 \frac{dx}{2-2x+x^2}$

c) Expliciter $F^{-1}(x)$.

3) Soit H définie sur]-∞ 1[par : H(x) = F(x) + F($\frac{x}{x-1}$)

a)Montrer que H est dérivable sur]-∞ 1[et calculer H'(x)

b) En déduire que pour tout: x < 1 on a : F($\frac{x}{x-1}$) = π - F (x)

3) Soit u la suite réelle définie sur IN par : $u_n = \frac{n}{n+1}\sum_{k=n}^{k=2n} F\left(\frac{1}{k}\right)$

a) M que pour tout : n $\in IN^*$ et k $\in$ {n, n + 1, .., 2n} on a :$F\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{k}\right) \leq F\left(\frac{1}{2n}\right)$.

b) En déduire la limite de u_n en $+\infty$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur]1, +∞[par : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{-1+x^2}}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

2) Soit φ la fonction définie sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ par : $\varphi(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

a) Montrer que φ réalise une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle I qu'on précisera

b) Montrer que φ^{-1} est dérivable sur I et que $\forall x \in I, (\varphi^{-1})'(x) = f(x)$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limité par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation y = 0, x = $\sqrt{2}$ et x = 2.

Soient $I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ et $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} I_k$; pour tout n ∈ IN et n ≥ 2.

Interpréter graphiquement I_n .

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.