

Lycée pilote de Tunis 	fonctions réciproques 1	<i>Terminales Maths & scxp</i>
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

Une seule des trois réponses est correcte. Cocher la bonne en justifiant.

Soit f une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et $g(x) = f(x) + c$ où c est une constante réelle. On désigne par f^{-1} et g^{-1} les fonctions réciproques de f et g alors on a :

$g^{-1}(x) = f^{-1}(x) + c$

$g^{-1}(x) = f^{-1}(x + c)$

$g^{-1}(x) = f^{-1}(x - c)$

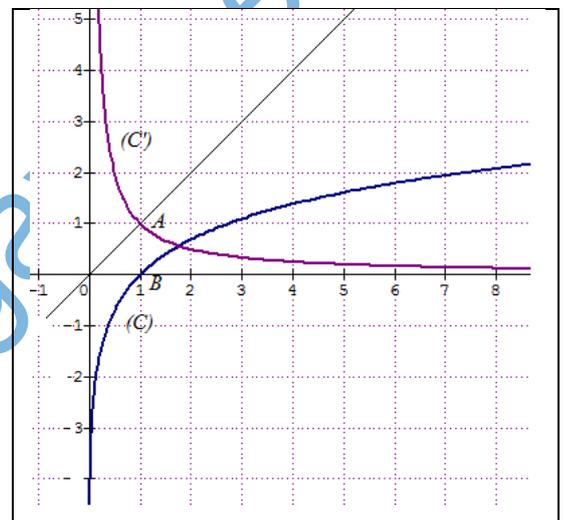
Exercice 2

Dans la figure ci-contre on donne les courbes (C) et (C') d'une fonction f dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée f' .

On donne les points A et B de coordonnées respectives $(1,1)$ et $(1,0)$ et on note (T) la tangente à (C) au point $B(1,0)$

Répondre par **vrai ou faux. Justifier**

- La droite (T) est parallèle à la droite (OA) .
- f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .
- f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 1$.
- La fonction f^2 est décroissante sur $]0, 1]$.



Exercice 3

A- Soit la fonction f définie sur $[0, 2[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } 0 < x < 2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.
 - Etudier les variations de f sur $]0, 2[$.
- Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0, +\infty[$.
- Montrer que pour tout $x \in [0, 2[$: $f(x) \geq x$.
 - Tracer dans un même repère orthonormé, les courbes représentatives (C) et (C') de f et g . On précisera la demi-tangente au point d'abscisse zéro.
- Soit n un entier naturel non nul.
 - Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[0, 2[$ une solution unique α_n .
 - Montrer que la suite (α_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer la limite de (α_n) .

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0, 2[$ par: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Construire (C).
- Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, 2[$.
 - Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle $[1, 2[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1} .
 - Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
- Soit h une fonction continue sur $[0, 2]$ dérivable sur $]0, 2[$ telle que pour tout $x \in]0, 2[$, $h'(x) = f(x)$ et $h(1) = 0$. On désigne par (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = h\left(1 + \frac{1}{n}\right) - h\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(\pi x)}$.

- Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $[1, +\infty[$.
- a) Calculer $f^{-1}(2)$.
b) Préciser le domaine de dérivabilité de f^{-1} et expliciter $(f^{-1})'(x)$.
- Soit g la fonction définie sur $[1, \sqrt{2}[$ par $g(x) = \frac{x^2}{2-x^2}$.
 - Etudier les variations de g .
 - Soit φ la fonction définie sur $[1, \sqrt{2}[$ par : $\varphi(x) = 2(f^{-1})(x) - f^{-1}(g(x))$.
Montrer que φ est dérivable sur $]1, \sqrt{2}[$ et vérifier que $\varphi'(x) = 0$
 - En déduire que $\varphi(x) = 0$.



Lycée pilote de Tunis 	fonctions réciproques 1	<i>Terminales Maths & S-exp</i>
Mr Ben Regaya. A	Éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

On a : $g(x) = f(x) + c = \varphi \circ f(x)$ avec $\varphi(x) = x + c$.

f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et φ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Donc g est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et on a : $g^{-1}(x) = f^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) = f^{-1}(\varphi^{-1}(x)) = f^{-1}(x - c)$.

Exercice 3

1. a) Pour $0 < x < 2$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x\sqrt{2x-x^2}}{2x-x^2} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{2-x}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x-x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x-x^2} = 0$ et donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$0 < x < 2$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0.

b) f est dérivable sur $]0, 2[$ et $\forall x \in]0, 2[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2} - x \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{(2x-x^2)} = \frac{2x-x^2-x(1-x)}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$

$= \frac{x}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, 2[$ et elle croît de $]0, 2[$ vers

$f([0, 2[) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow 2^-} f \right[= [0, +\infty[$.

2. f est continue et elle est strictement croissante sur $]0, 2[$ donc f réalise une bijection de cet intervalle sur son image à savoir $[0, +\infty[$. f admet alors une fonction réciproque g définie sur $[0, +\infty[$ et on a :

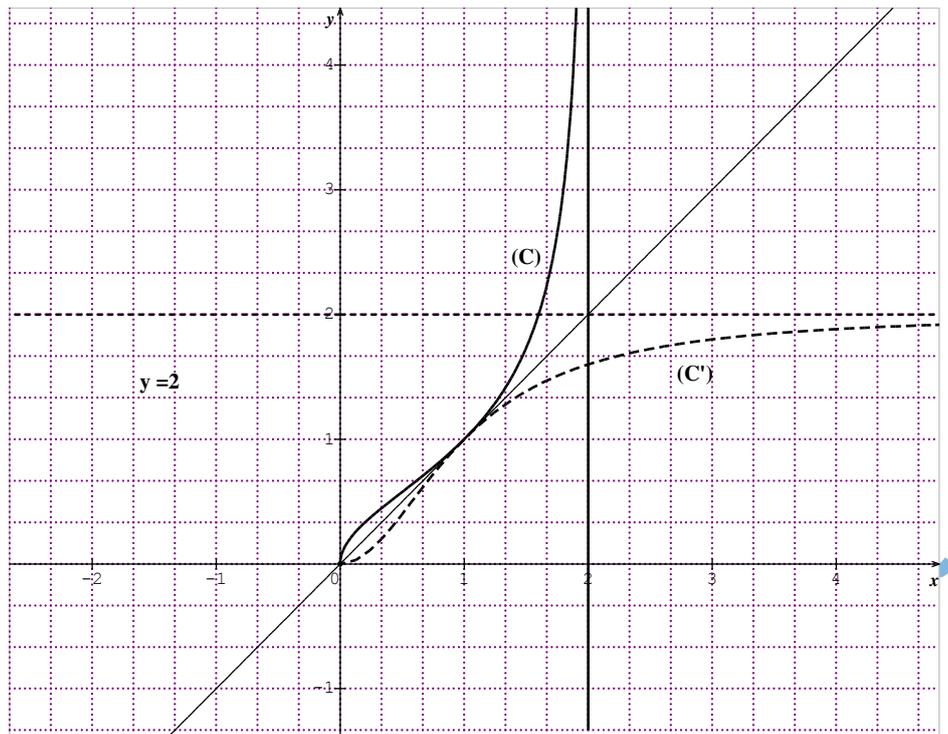
$f(x) = y; x \in [0, 2[\Leftrightarrow x = g(y); y \in [0, +\infty[$.

3. a) Pour $x \in [0, 2[$: $f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} - x = x \left(\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - 1 \right) = x \left(\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}} \right) =$

$x \left(\frac{1-2x+x^2}{\sqrt{2x-x^2}(1+\sqrt{2x-x^2})} \right) = \frac{x(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}(1+\sqrt{2x-x^2})} \geq 0$. Donc pour tout x réel de $[0, 2[$; $f(x) \geq x$.

b) Les courbes représentatives (C) et (C') de f et g .





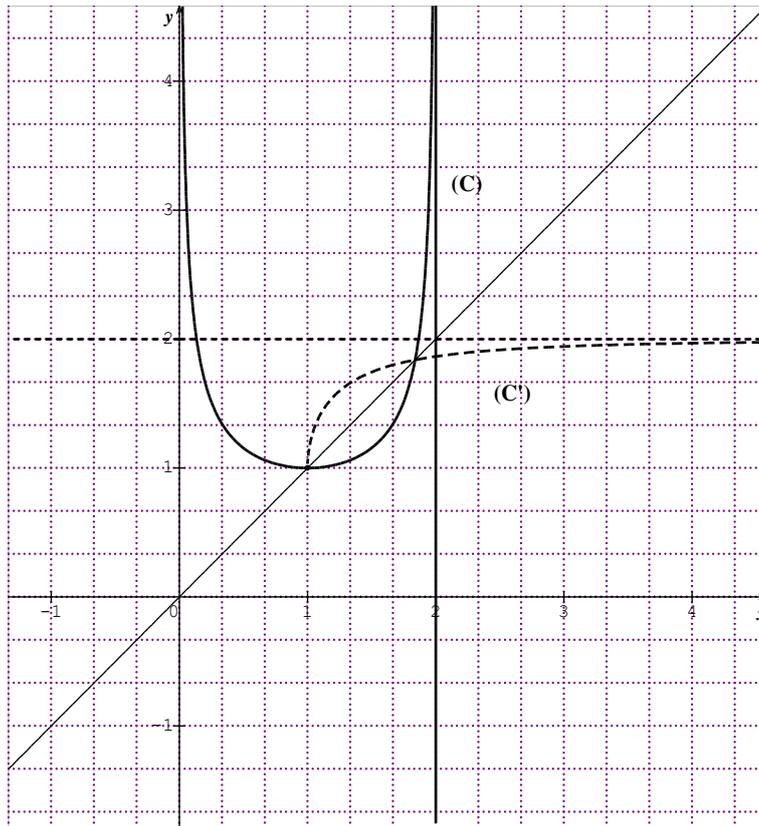
4. a) On sait que f est une bijection de $[0, 2[$ dans $f([0, 2[) = [0, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in f([0, 2[)$ donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[0, 2[$ une solution unique α_n . On a donc $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.
- b) $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ d'où $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} < \alpha_n$ car f est strictement décroissante sur $[0, 2[$. La suite (α_n) est décroissante.
La suite (α_n) est décroissante et elle minorée par zéro donc elle converge.
- c) On a $f(\alpha_n) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ et g est continue en 0 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = g(0) = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

Exercice 4

1. f est dérivable sur $]0, 2[$ et $f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$.

la fonction dérivée s'annule en 1 et elle croît de $[1, 2[$ vers son image $[1, +\infty[$ et elle décroît de $]0, 1]$ vers son image $[1, +\infty[$.

- b) plus tard.
2. a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, 2[$.
 g est continue et elle est strictement croissante sur $[1, 2[$ donc g réalise une bijection de l'intervalle $[1, 2[$ sur son image $J = [1, +\infty[$.
On a $f(y) = x$, $x \in [1, 2[\Leftrightarrow y = g^{-1}(x)$, $y \in [1, +\infty[$.
- b)



c) Résolvons pour $x \in [1, 2[$ l'équation d'inconnue y : $f(y) = x$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2y - y^2}} = x \Leftrightarrow 2y - y^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 - 2y + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Delta' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \text{ et donc deux solutions } y_1 = 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \text{ et } y_2 = 1 - \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

Remarquons que $y_2 < 1$ donc ne convient pas et par suite $\forall x \in [1, +\infty[$, $g^{-1}(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

3. a) Pour n entier naturel non nul, les réels $1 + \frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n+1}$ sont dans l'intervalle $[0, 2]$ et h est continue sur cet

intervalle donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[h\left(1 + \frac{1}{n}\right) - h\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right] = h(1) - h(1) = 0$

b) h étant continue sur $[0, 2]$ dérivable sur $]0, 2[$ et pour n entier naturel non nul, les réels $1 + \frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n+1}$

sont dans l'intervalle $[1, 2[$ et si x est un réel vérifiant $1 + \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}$ alors

$$f\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq f(x) \leq f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [1, 2[\text{ mais comme pour tout } x \in]0, 2[,$$

$$h'(x) = f(x) \text{ cette double inégalité s'écrit } h'\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq h'(x) \leq h'\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Résumons donc :

h est continue sur $[0, 2]$ dérivable sur $]0, 2[$ et pour $x \in \left[1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n}\right]$, $h'\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq h'(x) \leq h'\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

alors d'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \times h'\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq h\left(1 + \frac{1}{n}\right) - h\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \times h'\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
 ou tout simplement encore

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$\text{On a : pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq n^2 u_n \leq \frac{n^2}{n(n+1)} f\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f(1) = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = f(1) = 1. \text{ Alors par comparaison } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1.$$

Exercice 5

$$\cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. f est restriction à $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ d'une fonction dérivable en tout réel différent de $\frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$ donc f est dérivable sur

$$\left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } f'(x) = \frac{\pi \sin(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \geq 0$$

f est alors strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ comme elle est continue alors elle réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur

$$f\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \right) = \left[1; +\infty\right[.$$

$$2. \text{ a) } f^{-1}(2) = x; x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow \cos(\pi x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \pi x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 2k \\ x = -\frac{1}{3} + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ } x \text{ étant un réel de } \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ alors } f^{-1}(2) = \frac{1}{3}.$$



b) f est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et f' ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ [alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) =]1, +\infty[$ et pour tout réel x de $]1, +\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ avec $y = f^{-1}(x)$

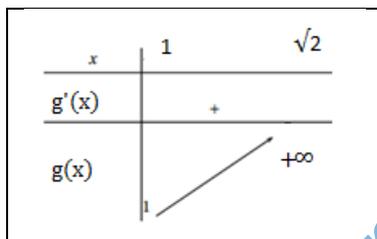
Pour $y \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ $f'(y) = \frac{\pi \sin(\pi y)}{\cos^2(\pi y)}$ et $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{1}{\cos(\pi y)}$ ou encore que $\cos(\pi y) = \frac{1}{x}$

Or $\sin(\pi y) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\pi y)} \Rightarrow \sin(\pi y) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1}$ ($\pi y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin(\pi y) \geq 0$)

$$\text{Ainsi } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

3. a) g est restriction à $\left]1, \sqrt{2}\right[$ d'une fonction rationnelle dérivable sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ donc g est dérivable sur $\left]1, \sqrt{2}\right[$

$$\text{et } \forall x \in \left]1, \sqrt{2}\right[, g'(x) = \frac{4x}{(2-x^2)^2} > 0$$



b) On sait que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$. g est dérivable sur $\left]1, \sqrt{2}\right[$ et $g\left(\left]1, \sqrt{2}\right[\right) =]1, +\infty[$ donc $f^{-1} \circ g$ est dérivable sur $\left]1, \sqrt{2}\right[$.

$$\varphi = f^{-1} - f^{-1} \circ g \text{ est dérivable sur } \left]1, \sqrt{2}\right[\text{ et } \forall x \in \left]1, \sqrt{2}\right[\varphi'(x) = (f^{-1})'(x) - (f^{-1} \circ g)'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = (f^{-1})'(x) - (f^{-1})'(g(x)) \times g'(x) \text{ on obtient } \varphi'(x) = 0 \text{ (trop de calcul...)}$$

$$\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in \left]1, \sqrt{2}\right[\text{ donc } \varphi \text{ est une constante. Ainsi } \varphi(x) = \varphi(1) = 0. \text{ Conclusion } \forall x \in \left]1, \sqrt{2}\right[; \varphi(x) = 0.$$