Exercice 1:

I)QCM :Une seule réponse est correcte.

1)L'approximation affine pour x proche de 0 de $\sin(\pi+x)$ est:

a) - x b) sinx c) -cosx

2)L' approximation affine de $\frac{1}{1+x}$ lorsque $x\approx 0$ est :

a)1 , b)1-x c)1+x

3)L'approximation affine de $\sqrt{1+x}$ lorsque $x\approx 0$ est :

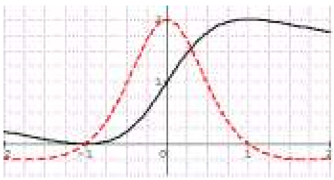
a)$1-\frac{1}{2}x$, b)$1+\frac{1}{2}x$ c)1+2x

4)pour tout n≥1,l'approximation affine de $(1+x)^n$ lorsque $x\approx 0$ est :

a)1+nx , b)$1+x^n$ c)n+x

II) Vrai ou Faux.

Les courbes ci-contre représentent une fonction f dérivable sur [-2 , 2] en trait continu et sa fonction dérivée f' en pointillé



a) $(\sqrt{f})'(0)=\frac{1}{2}$

b) La droite D : y = x + 1 est tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

c) Il existe un réel $c\in]-1,1[$ tel que $f'(c)=1$

Exercice 2

En utilisant la notion de dérivée, déterminer les limites suivantes :

1)a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

2)f est une fonction dérivable sur IR tel que f(1)= f(0)

calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(2x)-f(2x-1)}{x-\frac{1}{2}}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

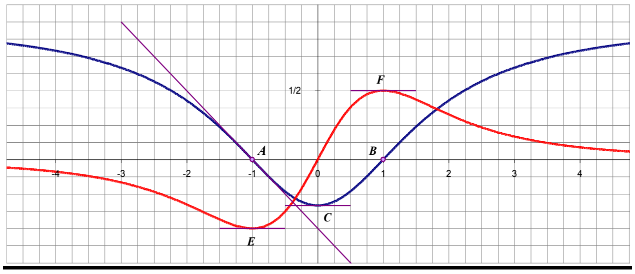
$$\begin{cases} f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice : 4

On a tracé ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions f et g définies et dérivables dans IR .

La droite D est tangente à la courbe C_f au point $A(-1;0)$ et passe par le point de coordonnées $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$



Par lecture graphique :

a)Déterminer $g'(-1)$ et $f'(-1)$

b)Une des deux fonctions est la dérivée de l'autre, déterminez laquelle en justifiant votre choix.

c)Déduire que le point B est un point d'inflexion à la courbe Cf .

Exercice 5

Vérifier que pour $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$; $1\leq\frac{\tan x}{x}\leq 1+\tan^2 x$

Exercice 6

Soit h la fonction définie par :

h(1) = 0 et $h'(x)=\frac{1}{x}$,x>0

On pose $f(x)=h(x+\sqrt{1+x^2})$.

1°) Montrer que f est définie, dérivable sur IR et calculer f' (x) .

2°) Montrer que f est une fonction impaire.

3°) Montrer que pour tout x de IR+, f (x) ≤ x.

Exercice :7

Soit f une fonction dérivable sur IR vérifiant ;

f (0) = 0 et $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

A/ 1 / Montrer que f est une fonction impaire.

2 / a – Prouver que f (1) ≤ 1.

b – En étudiant les variations de la fonction K définie sur [1, +∞[par $K(x)=f(x)+\frac{1}{x}$

Montrer que f est majorée sur [1, +∞ [puis déduire que f admet une limite ℓ en +∞.

B / Soit g la fonction définie par , $g(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$

1 / a – Etudier les variations de g .

b – Déduire que $\ell=2f(1)$

2 / On pose h (x) = tan x, pour $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

a – Montrer que $\ell=\lim\limits_{x\to\pi/2}(f\circ h)(x)$

b – Mque pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a f o h (x)= x c – Déduire la valeur de ℓ puis la valeur de f (1).

3 / Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

C / 1 / Montrer que l'équation f (x) = 2x-1 admet une solution unique $\alpha \in]0, 2[$

2 / Soit u la suite définie sur IN par :

$u_0 = 0$ et $\forall n \in IN$, $-1 + u_{n+1} = f\left(\frac{1}{2}u_n\right)$

a – Montrer que $\forall$ n de IN $u_n \in [0, 2]$

b – Montrer que $|u_{n+1} - 2\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2\alpha|$

c – Déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR et telle que pour tout réel x : $f(2x) = 2f(x)$ **(1)**

1) a) Déterminer la valeur de f (0)

b) Démontrer que $f'(2x) = f'(x)$, x∈IR

2) Pour x réel fixé, on désigne par (u_n) la suite définie sur IN par : $u_n = f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$

a) Montrer que la suite (u_n) est constante.

b) En déduire que pour tout réel x, f' (x) = f' (0)

3) Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur IR qui vérifient la relation **(1)**

Exercice :9 (3 points)

Soit f une fonction définie sur [1, +∞[et ayant une dérivée continue et croissante. Pour tout p ∈ IN^*, on pose $u_p = \sum_{n=1}^{p} f'(n)$

1) a) Démontrer en appliquant le théorème des accroissements finis à f dans un intervalle bien choisi que : Pour tout n de IN*,

$f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$

b) En déduire que ; Pour tout p de IN*,

$u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1)$

2) On prend f(x) = $\frac{1}{x^2}$

a) Vérifier que la suite u est monotone.

b) Montrer que la suite u est minorée par (-3)

c) En déduire que la suite (v_p) de terme général $v_p = \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est convergente et que sa limite appartient à $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Exercice 10:

Soit f (x) = $-1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; x∈]-1, 1[

A) 1) a) Etudier les variations de f

b)Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]-1, 1[une unique solution α et que $\alpha > \frac{4}{5}$

c)Déduire le signe de f(x)-x

2) Déduire que f réalise une bijection de]-1, 1[sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Construire dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement de f et de f^{-1}.

4) Expliciter f^{-1}(x) , x∈J

5)Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 \in [0,\alpha]$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

a)Montrer que $u_n \in [0,\alpha]$, n∈IN

b)Etudier la monotonie de la suite u.

c)Déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite.

B) Soit h la fonction définie sur] -1, 1[par :

$h(x) = f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

1)a) Vérifier que $h(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; x ∈] -1, 1[

b) Montrer que h admet une fonction réciproque g définie sur IR.

c)Mque g est dérivable sur IR et que

$g'(x) = \frac{-2}{\pi[(x+1)^2+1]}$

2)Soit φ la fonction définie sur IR* par :

$\varphi(x) = g(x-1) + g\left(\frac{1}{x}-1\right)$

a) Mque φ est dérivable sur IR* et déterminer φ'(x)

b)Calculer φ(1) et φ(- 1) .

En déduire que pour tout x >0, φ(x) = -1 ,

et que pour tout x < 0, φ(x) = 1

3)Soient V et W les suites définie sur IN* par :

$V_n = \sum_{k=1}^{n}\left[g\left(\frac{1}{k}\right) + g\left(\frac{-1}{k}\right)\right]$ et $W_n = \frac{V_n}{n}$.

a)Donner la valeur de $\varphi\left(1 + \frac{1}{k}\right)$; k∈IN*

b)En déduire que $g\left(\frac{1}{k}\right) + g\left(\frac{-1}{1+k}\right) = -1$; k∈IN*

c)Montrer que pour tout n de IN* ; $V_n = -n - g\left(\frac{-1}{n+1}\right)$

En déduire que la suite W est convergente et donner sa limite.

Exercice 11:

A/ Soit $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x-1}$; x ∈] 1, 2]

1) a/ Justifier la dérivabilité de f sur] 1, 2 [et exprimer f '(x) en fonction de x.

b/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter, graphiquement, le résultat obtenu.

c/ Dresser le tableau de variation de f, puis construire la courbe C_f représentative de f dans le repère R.

2) a/ Mque l'équation f(x) = x admet dans] 1, 2] une solution unique α.

b/ Vérifier que $\alpha \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

3) a/ Mque f réalise une bijection de] 1, 2] sur un intervalle J que l'on déterminera. On notera $f^{-1} = g$.

b/ Etudier la dérivabilité de g.

c/Construire la courbe C_g dans le même repère R.

d/Mque pour tout x de J on a : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

B/ On considère la suite U définie par
$U_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1, 2]$.

2) Calculer g'(x) pour $x \in [1, 2]$, puis montrer que pour $x \in [1, 2]$, $|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Moque pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$.

4) En déduire U converge vers un réel que l'on déterminera.

C/ On considère la fonction ϕ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

par $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{g[\tan(2x)]} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\\ \phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 & \end{cases}$.

1) Mque pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\phi(x) = \frac{1}{1+\cos(2x)}$.

2) Montrer que ϕ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dans un intervalle I que l'on précisera.
On note ϕ^{-1} sa bijection réciproque.

3) Calculer $\phi^{-1}(2 - \sqrt{2})$.

4) a/ Etudier la dérivabilité de ϕ^{-1} sur I.

b/ Expliciter $(\phi^{-1})'(x)$ en fonction de x.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{1 - \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.

b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé R.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.

b) Construire la courbe $\mathcal{C}'$ de g dans le même repère que $\mathcal{C}$

3) a) Déterminer $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Montrer que $\frac{1}{g}$ est dérivable sur J puis vérifier que $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{2-x^2}}$, $x \in$ J

4) Soit u la suite définie sur IN* \{1} par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

a) Montrer que pour tout n de IN*\{1},
$\frac{n+1}{n} g\left(\frac{1}{2n}\right) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} g\left(\frac{1}{n}\right)$

b) Déduire que la suite u est convergente.

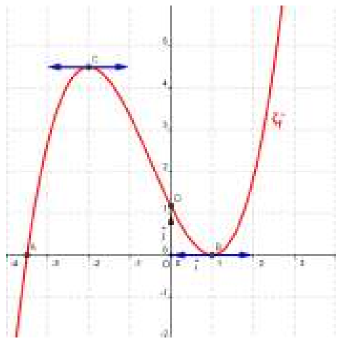
5) Soit h la fonction définie sur [-1, 1] par $h(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ et H la primitive de h sur [-1, 1] qui s'annule en 0.

a) Prouver que H est une fonction impaire.

b) Montrer que pour tout x de [0, 1[on a :
$1 - 4H(x) = \frac{2}{g(x)}$

c) Etudier les variations de H puis construire sa courbe dans un repère orthonormé R'.

Exercice13



Ci-contre,la représentation graphique selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction dérivée f ' d'une fonction f deux fois dérivable sur IR.

De plus, on a: $A\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$, $B(1,0)$, $C\left(-2, \frac{9}{2}\right)$ et $D\left(0, \frac{7}{6}\right)$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en fournissant une justification bien rédigée:

1°) f admet un extremum local en:
a) A b) B c) C

2°) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = \frac{7}{3}$

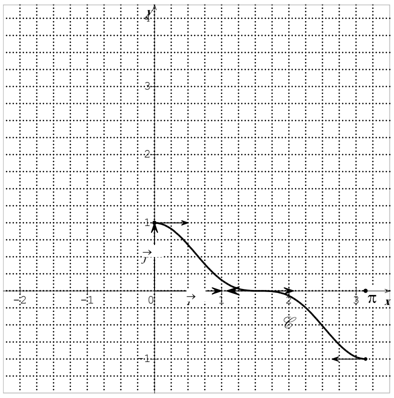
3°) La courbe de f admet au moins deux points d'inflexion.

4°) La restriction g de f à [-2, 2] est une bijection de [-2, 2] sur f([-2, 2])

5°) Si g est une bijection et si g(0) = 2 alors g^{-1} est dérivable en 2 et $\left(g^{-1}\right)'(2)=\dfrac{6}{7}$

Exercice 14

La courbe C donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ,\ \pi]$.



- C admet au point $A(0,1)$ et au point $C(\pi,-1)$ une demi-tangente horizontale.
- C admet au point $B\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ une tangente horizontale

1°)a) Montrer qu'il existe au moins un réel c de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(c)=-\dfrac{2}{\pi}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(\sin 3x)}{x}$

2°)a) Justifier que f réalise une bijection de $[0\ ,\ \pi]$ sur [-1 , 1]. On note f^{-1} la bijection réciproque de f.

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

c) Tracer, sur la feuille à rendre, la courbe représentative C ' de f^{-1}.

Pour la suite, on admet que pour tout $x\in[0\ ,\ \pi]$**,** $f(x)=(\cos x)^3$

3°)a) Vérifier que $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{9}{8}$ où f ' désigne la fonction dérivée de f.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

4°)a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J =]0, 1[.

b) Montrer que pour tout $x\in J$, $\cos\left(f^{-1}(x)\right)=\sqrt[3]{x}$.

Exercice n°: 15 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $I=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité 2 cm)

1°)a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout $x>-\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=\dfrac{2x+2}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier le signe de f(x) – x pour $x>-\dfrac{1}{2}$.

2°)a) Montrer que f réalise une bijection de I sur IR. On note g la bijection réciproque de f.

b) Tracer, dans le même repère, les courbes représentatives C et C ' respectivement de f et de g.

c) Montrer que $\forall\ x\in IR,\ g(x)=\dfrac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$.

3°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit φ_n la fonction définie sur $I=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$\varphi_n(x)=f(x)+x^n$

a) Montrer que l'équation $\varphi_n(x)=1$ admet dans $\left]0,\dfrac{9}{10}\right[$ une unique solution α_n.

b) Etudier le signe de $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$,pour $x\geq 0$. En déduire le sens de variation de la suite (α_n).

c) Montrer alors que la suite (α_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 16: (5 points)

Soit f la fonction définie sur]1, +∞[par

f(x) = $\tan(\frac{\pi}{2x^2})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur]1, +∞[et que f '(x) = $\frac{-\pi}{x^3}(1+tan^2(\frac{\pi}{2x^2}))$

b) Déduire que f réalise une bijection de]1, +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Construire dans un même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de f et f^{-1}.

2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

b) Soit g la fonction définie sur]0, +∞ [par

g(x) = $\left[\frac{1}{f^{-1}(x)}\right]^2$

M que g est dérivable sur]0, +∞ [puis expliciter g'(x)

3) Soit n ∈ IN^* ;

a) Montrer que l'équation f(x) = $\sqrt{n}$ admet dans]1, +∞ [une solution unique α_n

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante.

c) Déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

4) Soit n ∈ IN^* , $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n+k}$

a) Montrer que $\alpha_{2n} \le S_n \le \alpha_n$

b) Déduire que la suite S est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 17 (5 points)

On considère la fonction f définie sur [0, 1] par :

f(x) = cos($\pi\sqrt{x}$)

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite.

2) a) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe $\mathscr{C}$ de f dans le repère orthonormé R = (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) donné dans **l'annexe I**.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur [-1,1]

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère R.

d) Soit φ la fonction définie sur [0, 1] par :

φ(x) = cos (π(1 + $\sqrt{x}$))

Montrer que la courbe de φ est l'image de celle de g par une rotation que l'on précisera

3) a) Montrer que g est dérivable en 1 à gauche et déterminer g'(1).

b) Etudier la dérivabilité de g en (-1) à droite.

c) Montrer que g est dérivable sur]-1, 1[et que

g'(x) = $\frac{-2\sqrt{g(x)}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

4) Soit h la fonction définie sur [-1, 1] par

h(x) = $\sqrt{g(x)}$

a) Montrer que h est dérivable sur]-1, 1[et que h'(x) = $\frac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

b)Montrer que pour tout x ∈ [-1, 1], h(x) + h(-x) = 1

Exercice 18(7 points)

La courbe $\mathscr{C}$ donnée dans **l'annexe I** représente une fonction f définie et continue sur]0, +∞ [et dérivable sur]0, +∞ [\ {1, 2}.

- $\mathscr{C}$ admet au point A(2, 0) une demi- tangente verticale.
- Le point B(3, 2) est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.
- $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (O, $\vec{j}$) au voisinage de +∞
- $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation : x = 0.

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to0+}\frac{f(cosx)}{x}$;$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x-2}$ $\lim_{x\to1^+}\frac{f(3x)-f(x)}{x-1}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x^2+1)}{x}$

2) Soit h la restriction de f sur [2, +∞[.

a) Montrer que h réalise une bijection de [2, +∞[sur intervalle J que l'on précisera. (On notera h^{-1} la bijection réciproque de h)

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J. Calculer $(h^{-1})'(2)$.

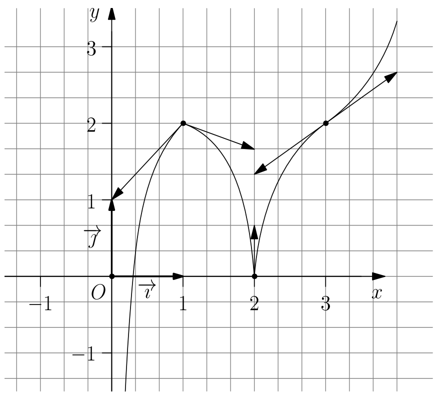
c) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de h^{-1} dans **l'annexe I** .

3) Soit g la fonction définie par : g(x) = $\sqrt{2-f(x)}$

a)Déterminer le domaine de définition D de g.

a) Etudier la dérivabilité de g sur D.

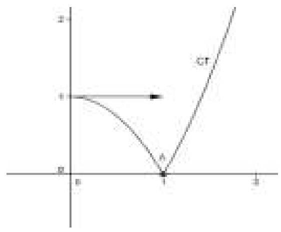
c) Dresser le tableau de variation de g.



Exercice 19:

Répondre par vrai ou faux, aucune justification n'est demandée.

1) Soit f une fonction dérivable sur IR+, dont la fonction dérivée est représentée par la courbe ci contre :



a/ f est strictement croissante sur IR+

b/C_f a un point anguleux au point d'abscisse 1.

c/ $f'_d(0) = 0$.

d/ C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

e/ f admet une fonction réciproque f^{-1} .

f/ f^{-1} est dérivable sur son domaine.