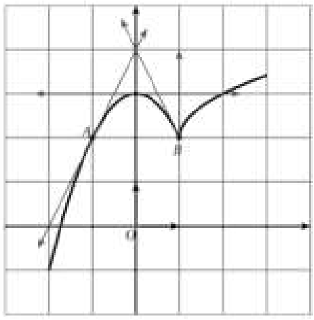
Je pensais que les vacances me videraient la tête.
Mais non, les vacances, ça ne vide qu'une chose : le porte-monnaie

Exercice 1



Ci-contre est la représentation graphique d'une fonction définie continue sur [-2,3] dérivable sur [-2,1[U]1,3]

I/ Répondre par Vrai ou Faux justifier

1)La courbe de fof admet au point d'abscisse nulle une tangente parallèle à la première bissectrice.

2)Il existe c unique dans]-2,1[tel que $f'(c)=1$.

3)f réalise une bijection de [-2,0] sur [-1,3]

4)f^{-1}est dérivable sur]-1,3[

II/1) Déterminer graphiquement :

$\lim\limits_{n\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{n\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

2)Déterminer graphiquement $f'(-1)$ en déduire

$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{f(x^2-1)-2}{x}$

Exercice 2 :

1) Démontrer la propriété suivante :

Une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité du plan ou une symétrie orthogonale.

2) Dans le plan complexe on considère la similitude s d'écriture complexe :

$z' = -i\bar{z}+1+i$. Soit A d'affixe 1 et B d'affixe i.

a)Démontrer que A et B sont invariants par s.

b) Quel est l'image du point O par s.

c)Caractériser alors s.

3)Soit h l'homothétie de centre $\Omega(\frac{1}{2}(1+i))$ et de rapport $\sqrt{2}$. Caractériser $\sigma = h \circ s$.

Exercice 3 (5 points)

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2+nU_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$1-\dfrac{1}{2n} \leq u_n \leq 1-\dfrac{1}{2n+1}$.

b) En déduire que la suite u est croissante.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-u_n)$.

2) Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que les suites V et U sont adjacentes

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(1-u_k)(v_k-1)$.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; on a :

$\dfrac{1}{2k(2k+1)} \leq (1-u_k)(v_k-1) \leq \dfrac{1}{2k(2k-1)}$

c)Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)$.

d) En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite

Exercice 4 :

Répondre par vrai (**V**) ou faux (**F**).
(avec justification)

1) Soit f la fonction définie sur]-∞, 1] par :
$f(x) = \sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^3}$
La limite de f en $-\infty$ est : 0

2) Soit f une bijection de IR sur IR et
$g(x) = f(x) + c$ où c une constante réelle
On désigne par f^{-1} et g^{-1} les réciproques respectives de f et g.

On a alors : $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) + c$

3) L'ensemble
$\{M(z)\in P \,/\, \arg[(z-i)(\bar{z}+2i)] \equiv \pi\,[2\pi]\}$ est un segment.

4) a) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x}{\sin x}} = 1$,b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x} = +\infty$

5) Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x}$.

6) Soit f la fonction définie sur [1, + ∞ [par :
$f(x) = \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^5}$

a) f est dérivable à droite en 1.

b) $f'(x) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}$, pour tout $x > 1$.

Exercice 5 (4 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct . On désigne par f l'application u plan dans lui-même
qui à tout point M d'affixe z associe le point M'
d'affixe $z' = (\frac{1+i}{2})z + 1 - i$

1°)a) Montrer que f est une similitude directe centre I que l'on précisera

b) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application g_n = fofo...of (n fois)

2°) On définit la suite des points (A_n) par : A_0 le point d'affixe 2 + i et pour tout entier naturel n, .
On désigne par $A_{n+1} = f\,(A_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $A_n = g_n(A_0)$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, n
$a_n = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}}$

c) Montrer que pour tout entier naturel n, les points I, A_n et A_{n+4} sont alignés.

Exercice 6 ;

Pour tout $n \geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - 2x - 3$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n.
En déduire le signe de $f_n(x)$ pour $x \geq 1$.

2) Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
En déduire que u est monotone.

3) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $1 < u_n \leq 3$.

4) Déduire que la suite u est convergente.

5) Pour tout $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$.
Déterminer la limite de S_n.

Exercice 7 (5 points)

I. Soit : (E_θ): $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2\,e^{2i\theta} = 0$. Soit $\theta \in [0,\pi]$

1)Résoudre, dans C , l'équation (E_θ) .

2)Donner le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E_θ).

II. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $z_1 = (1+i)e^{i\theta}$ et $z_2 = (1-i)e^{i\theta}$.

1)Déterminer l'ensemble C_1 des points M_1 lorsque θ décrit $[0,\pi]$

2)a) Montrer que : $\frac{z_2}{z_1} = -i$.

b) En déduire que le triangle OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O.

3)a) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Déterminer θ pour que la droite (M_1M_2) soit parallèle à la droite d'équation : y = – x.

Exercice 8 (4points)

Soit ABCD un losange de centre O et de sens direct tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [AB] .

1) Caractériser chacune des isométries :

a) **f** $= S_{(CB)} o S_{(AD)}$; b) **g** $= S_{(AD)} o\ S_{(AB)}$

c) **h = fog.**

2) Soit $\varphi = t_{\overrightarrow{AB}} \ldots_{(AC)}$.

a) Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$; en déduire $(\varphi \circ \varphi)(A)$.

b) Montrer que φ n'est pas une symétrie orthogonale.

c) En déduire que φ est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Exercice 9:

Soit f la primitive qui s'annule en 0 de la fonction h définie sur IR par : $h(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$. La courbe C de f admet deux branches paraboliques de direction (x'x) l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

1)a)Montrer que C admet un point d'inflexion.

b) Montrer que f est impaire.

c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

d)On pose $g = f^{-1}$. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}$

2) Montrer que g est dérivable sur J puis expliciter g'(x) en fonction de g(x)

3) Soit h la fonction définie sur $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par:
$h(x) = f(\frac{1}{2}\tan x)$.

a) Mque h est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et calculer h'(x).

b)Montrer qu'il existe un réel a de $]\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ tel que $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4\cos a}$.

c)En déduire une valeur approchée de $f(\frac{1}{2})$.

Exercice 10 (4points)

On considère un triangle ABC rectangle en A et isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I le milieu de [BC].

1)Soit f une isométrie tel que f({B, C}) = {B, C}.
Montrer que f fixe I, en déduire les isométries f qui vérifient f({B, C}) = {B, C}. quelles sont ceux qui laissent ABC globalement invariant ?

2)Soit $D = S_{(BC)}(A)$ et g une isométrie qui transforme {A, B, D} en {A, C, D}

a)Montrer que g(B) = C et que g laisse I invariant.

b) Déterminer alors les isométries g.

3)a) Caractériser l'isométrie $r = S_{(AD)} o S_{\Delta}$ où Δ est la médiatrice de [BD]

b) Soient M et N les point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Montrer que r(M) = N et en déduire que la médiatrice de [MN] passe par un point fixe.

4)a) Montrer que $S_{\Delta} o S_{(AB)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

b)) En déduire la forme réduite de l'isométrie $\varphi = r \circ S_{(AB)}$

Exercice 11 : (4 points)

Soit $\lambda \in IR$, on considère la suite U définie par :

$U_0 = \lambda$ et $2U_{n+1} = U_n^2 - 4U_n + 9$.

1) Montrer que si la suite U est convergente, alors elle converge vers 3.
2) Montrer que la suite U est croissante.
3) a) Déterminer la valeur de λ pour laquelle la suite U est constante.

   b) Etudier la suite U dans le cas où $\lambda = 1$.
4) M que si $\lambda \in]1, 3[$ alors $\forall\, n \in IN$, $1 < U_n < 3$.
   En déduire que la suite U est convergente.
5) Montrer que si $\lambda \notin [1, 3]$ alors la suite U est divergente. (on pourra comparer U_1 et 3)

Exercice :12

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On note $J = A*D$, $K = C*D$ et $F = S_D(C)$.

La perpendiculaire en D à la droite (BD) coupe la droite (OJ) en un point E.

1) Soit S la similitude directe telle que S(A) = J et S(B) = D.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Déterminer les images des droites (BD) et (AD) par la similitude S. En déduire S(D).

2) On désigne par ζ et ζ' les cercles de diamètres respectifs [AJ] et [BD].

a- Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \zeta \cap \zeta'$ puis construire le point Ω.

b- Montrer que les points Ω, B et E sont alignés.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(O) = A$ et $\sigma(K) = B$.

a- Déterminer le rapport de σ.

b- Montrer que C est le centre de σ.

c- Déduire l'axe de σ.

4- Soit $\varphi = S o \sigma$.

a- Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(K)$.

a- Caractériser alors φ.

Exercice 13 :(3points)

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

1)On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est strictement positif.

2)Calculer S + T , ST puis en déduire S et T

Exercice 14 (7 points)

Soit a un paramètre complexe , on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_a) : z^2 - (2a-1)z + 2a^2 - (1+i)a = 0$

1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

2) Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B , M , M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$z_A = \frac{-1+i}{2}$, $z_B = \frac{1+i}{2}$, $z_M = a$, $z_1 = (1-i)a-1$ et $z_2 = (1+i)a$

a) Montrer que pour tout $a \neq \frac{i}{2}$ Montrer que M_2 se déduit de M_1 par une rotation et en déduire la nature du triangle AM_1M_2

b) Déterminer l'ensemble

$\Gamma = \{ M(a) \in P \,,\, |(1-i)a-1| = 2\sqrt{2} \}$

c) Montrer que pour $a \neq \frac{1+i}{2}$, on a :

$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}}) \equiv -\frac{\pi}{4} + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}})[2\pi]$

d) Soit M un point de Γ , construire à partir de M les points M_1 et M_2.

3) On pose $a = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a)Donner l'écriture exponentielle de $z_1 - z_A$.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire du triangle AM_1M_2 est maximale.

Exercice 15:

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

ABCD est un losange tel que AB=AD=DB ;

A'=A*B et O=A*C

Définir les transformations suivantes :

$f = S_{AB} o S_{AC}$ et $g = S_{AB} o S_{CD}$

2)a)Caractériser $g = t_{AB} o S_{DA'}$

b)$\varphi = t_{AB} o S_{AC}$

Mque φ est une symétrie glissante et la caractériser.

3)a)Soit $h_1 = r(A,\frac{\pi}{3}) \circ S_{AC}$

Mque h_1 est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

b)Soit $h_2 = r(A,\frac{\pi}{3}) \circ S_{DC}$

Mque h_2 est une symétrie glissante.

4)a)Montrer qu'il existe un unique déplacement d tel que d(A) = B et d(B) = D

b)caracteriser d

5)Soit S l'antidéplacement tel que S(A)=B et S(B)=D

a)Montrer que S n'a pas des points fixes

b)Caractériser S

Exercice 16: (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct, ABCD est un losange de centre O, tel que :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. I est le milieu du segment [AB] et J est le milieu du segment [AD] .

1) a/ Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en B et I en O.

b/ Caractériser f.

c/ Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2) Soit g l'antidéplacement qui transforme l'ensemble { A, B, D } en l'ensemble { B, C, D } et tel que g(A)=D.

a/ Montrer que g(D)=B.

b/ Caractériser alors g.

3) Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble { A, B, D } en l'ensemble { B, C, D } et tel que S(A) = C. Démontrer que S est une symétrie orthogonale d'axe (BD).

4) Caractériser les applications :

f o g et f o g o S.

Exercice 17 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur]-∞, 1] par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x-1} & \text{si } x \prec \\ f(x) = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}x)} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

1)a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2)a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de]-∞,1] sur]-∞,1].

3)a) Calculer $f^{-1}(0)$; $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Pour tout x∈]-∞,0[, exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

4)a) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite de 0.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]0, 1[et que pour tout x ∈]0,1[, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{4x}{\pi\sqrt{1-x^4}}$.

5) On pose pour tout x ∈[0,1],

$\varphi(x) = f^{-1}\left(\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}x)}\right) + f^{-1}\left(\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}x)}\right)$;

Montrer que pour tout x ∈[0,1], φ(x) = 1.

Exercice 18 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit A(i) et B(i+1).

On considère l'application

f:P\{A}→P :M(z) →M'(z') tel que $z'-i = \dfrac{2}{\bar{z}+i}$.

1)Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

2)Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f_0

3)Dans cette question, on suppose que $z=1+i+e^{i\theta}$

a)Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}[$

b)Montrer que $z'-i=1+i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

c)En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f.

Le construire.

Exercice 19:(6 points)

Soit *m* un paramètre complexe. On considère dans C l'équation:

(E) :z² - 2 (m +i) z +2m²- 2im - 5 = 0.

1) Résoudre dans C l'équation(E).

2) Dans la suite le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (0,u, v).On désigne par M,J,N et N' les points d'affixes respectives m, -1+2i, (1+i)m + 2+i et (1-i)m- 2+ i

Soit f l'application qui au point N associe le point N'

a) Montrer que l'écriture complexe associée à f est: z' = -iz - 3+3i .

b) Caractériser f ; ω le centre de f

3) Soit I le milieu de [NN'] ,on pose I = t(M)

a) Montrer que t est une translation dont précisera le vecteur.

b) Montrer que si N est distinct de ω alors (ωI) est perpendiculaire à (NN').

Exercice 20:

Soit : $f(x) = \left[\sqrt{(4-\sqrt[3]{x^2}}\right]^3$ x∈ I= [0, 8]

1°) Démontrer que f est continue sur I.

2°) Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-8}{x} = -\infty$.

La fonction f est-elle dérivable en 0.

3°) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

4°) Construire la courbe C de f.

5°) Déduire la construction de la courbe β :

$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4$

Exercice 21 : (4 points)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0,\pi[$ par

$g(x)=\frac{1}{1+\cos x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que g réalise un bijection de $[0,\pi[$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

2) a) g^{-1} est-elle dérivable à droite en $\frac{1}{2}$?

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$

et que $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{x\sqrt{2x-1}}$ pour tout $x > \frac{1}{2}$

3) a) Déterminer $g^{-1}(1)$

b) Calculer $\lim_{x\to 1} \frac{g^{-1}(x)-\frac{\pi}{2}}{x-1}$

4) L'affirmation suivante est-elle exacte ? Justifier votre réponse.

La fonction h définie par $h(x) = g^{-1}(\frac{x+1}{2x})$ est dérivable en 1 et $h'(1)= 0.5$.

Exercice 22:

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de sens direct et de centre I. On désigne par J et K les milieux respectifs des segments [AB] et [BC] et par R la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$

1) Caractériser chacune des applications suivantes :

a) $\varphi_1 = S_{(IK)} \circ S_{(AI)}$ b) $\varphi_2 = \varphi_1 \circ S_{(AC)}$

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ transformant B en A et A en D

b) Caractériser φ.

c) On pose f = R o φ. Déterminer f(B) puis caractériser f.

d) On pose g = R^{-1}o φ. Caractériser g.

3) Soit ψ l'antidéplacement transformant B en A et A en D.

a) Montrer que ψ est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

b) On pose h = R o ψ. Déterminer h(J) et h(A) puis caractériser h.

4) On pose k = ψ^{-1}o φ.

a) Caractériser k.

b) En déduire l'ensemble G des points M du plan vérifiant ψ (M) = φ(M).

Exercice 23

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BC]

1) Soit f la similitude directe qui envoie A en C et C en B

a) Préciser le rapport et l'angle de f

b) Soit Ω le centre de f.

Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega C} = -\Omega A^2$ et déduire que (Ω A) $\perp$ (Ω I)

c) Déterminer f o f (A) et déduire que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BI)

2) Soit g la similitude directe de centre B qui envoie A en C

a) Préciser le rapport et l'angle de g

b) Caractériser alors R = g o f^{-1}

3) On pose $\sigma = f \circ S_{(BC)}$ et D=R(A)

a) Déterminer σ (D) et σ (C).

b) Déterminer la nature et le rapport de σ

c) On note Ω' le centre de σ . Déterminer σ o σ(D) et déduire la construction de Ω'

4) On suppose que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé direct

a) Déterminer la transformation complexe de f

b) En déduire que A, Ω' et Ω sont alignés

Exercice 24:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O,u,v).

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' = iz + 1 + i

1°) Caractériser f.

2°) On considère dans C l'équation

E :$-iz^3-3(1+i)z^2-6z-10+2i=0$

a) Montrer que z est solution de (E) si et seulement si z' est une racine cubique de 8.

b) Déterminer alors les solutions de (E).

On notera A, B et C les points images des solutions de l'équation (E).

c) Montrer que l'ensemble des points M(z) tels que $|iz+1+i| = 2$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

d) Soit g l'application définie par g = f o S où S est la symétrie orthogonale d'axe (O, u). Montrer que g est une symétrie glissante.

Exercice 25 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ par :

$f(x) = \frac{1}{1+\tan x}$.

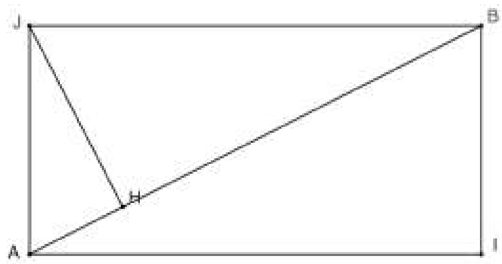
Partie A :

1) a) Etudier les variations de f sur $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

b) Déduire que f réalise une bijection de $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ sur un intervalle J à préciser.
On désigne par h sa bijection réciproque.
c) Construire dans un même repère orthonormé les courbes C de f et C' de h.
2) a) Montrer que h est dérivable sur J.
b) Vérifier que pour tout x de J ;
$\tan(h(x)) = \frac{1}{x} - 1$.
c) Déduire que pour tout x de J ;
$h'(x) = -\frac{1}{x^2+(x-1)^2}$.
3) a) Montrer que pour tout n > 0, il existe un unique a_n de $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ tel que $f(a_n) = \sqrt[3]{n}$.
b) Etudier la monotonie de la suite (a_n).
c) Déduire que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B :
On considère la fonction g définie sur $]-\infty, 0]$ par :
$$\begin{cases} g(x) = h\left(1-\frac{1}{x}\right) \; si \; x<0 \\ g(0) = \frac{-\pi}{4} \end{cases}$$
1) Montrer que g est continue en 0 à gauche.
2) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer g'(x) pour tout x < 0.
3) a) Montrer que pour tout x < 0, il existe un réel c de] x, 0 [tel que $\frac{g(x)+\frac{\pi}{4}}{x} = -\frac{1}{1+(c-1)^2}$.
b) Déduire que g est dérivable à gauche en 0 et calculer g'(0).
4) Soit u la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_1^n g(\frac{-k}{\sqrt[3]{n^2}})$; n > 0
Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 26 :
Soit AIBJ un rectangle de sens direct tel que
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



Soit H le projeté orthogonal de J sur (AB)
1)a)Caractériser la similitude directe s telle que s(B) = J et s(J) = A
b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de sos.
2)Soit s' la similitude directe de centre B et telle que s'(I)= J
a)Déterminer l'angle et le rapport de s'
b) Soit K l'image de H par $t_{\overrightarrow{JB}}$ Caractériser sos' et déduire que s'(K)= H .
3) Soit g la similitude indirecte telle que g(B) = J et g(J) = A et soit H' le symétrique de H par rapport à (AJ)
a) Justifier que g admet un centre Ω
b)Caractériser gog et déduire que Ω ∈(AB)
c) Soit $\sigma = gos^{-1}$ .caractériser σ et déduire g(H)
d)Montrer que Ω appartient à (JH') construire alors Ω et l'axe de g
4) le plan est maintenant muni d'un repère orthonormé direct (A , $\vec{u}, \vec{v}$) tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AJ}$
a) Montrer que $\sqrt{3} + i$ est l'affixe du point B.
b) Donner la *forme* complexe de g.
c) En déduire l'affixe de Ω et donner une équation de l'axe de g.

Exercice 27(4 points)
On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par
$f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$; $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 0$
1) a)Etudier la dérivabilité de f en $\frac{\pi}{2}$ a gauche.
Montrer que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,
on a : $f'(x) = -\frac{1}{1+\sin x}$
b) Montrer que *f* est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sur]0, + ∞[.
c) On désigne par g la fonction réciproque de *f*. Tracer C_f et C_g dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique : 2)
2) a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x = \frac{1-f^2(x)}{1+f^2(x)}$
b) Montrer que g est dérivable sur]0, + ∞[et que
$g'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$
3)On donne la suite (U_n) définie sur IN^* par :
$U_n = g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)$
a)Montrer que pour tout n de IN^*,
$\frac{1}{n(n+1)} g'\left(\frac{1}{n+1}\right) \le U_n \le \frac{1}{n(n+1)} g'\left(\frac{1}{n}\right)$
b)Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 U_n$.