LPBT **Mr Masmoudi. R**

Sujet de révision N°3

EXERCICE 1 :

$(O,\vec{u},\vec{v})$. est un repère orthonormé direct du plan

Soit A le point d'affixe 1+i. Soit f l'application du plan dans le plan

qui à tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$

1.a. Montrer que M' appartient à la droite (OA).

b. Montrer que fof(M)=M'.

c. Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux

2. On considère l'équation E :z^2-2cosθ z+1=0 avec θ est un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$

a. Résoudre dans C l'équation E.

b. Soit $z = e^{i\theta}$ ou θ est un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

Déterminer et construire l'image du cercle unité par f.

c. Écrire la forme exponentielle de z'.

3.Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.M_1 le point d'affixe z_1 image de M par r,

M_2 d'affixe $z_2=\bar{z}$ et M_3 le point d'affixe $z_3=z_1+z_2$.

a. Exprimer $z_1$en fonction de z puis z_3 en fonction de z.

b. Construire M_1 ,M_2 et M_3 (ANNEXE)

et Montrer que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ est un losange.

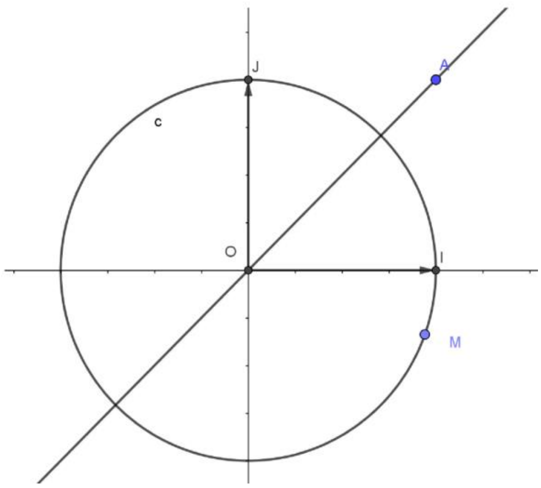
c. Vérifier $z'-z = \frac{1}{2}iz_3$ et en déduire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$

4.a. Démontrer que M ,M_1, M_3 et M_2 appartiennent à un même cercle de centre O

si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}OM$.

b. Donner alors la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$

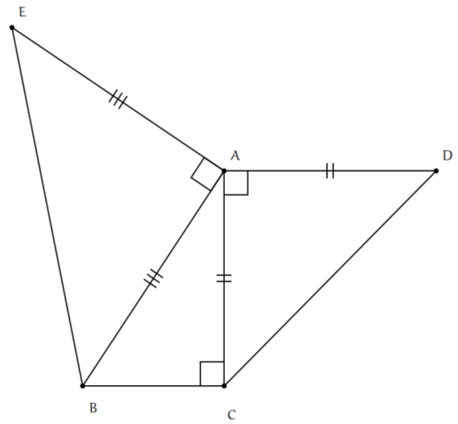
ANNEXE :



EXERCICE 2 :

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on considère le triangle ABC rectangle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et les triangles ACD et ABE isocèles et rectangles en A .
On désigne par I , J et K les milieux respectifs de [CD] , [AC] et [AD] .

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en D et C en A.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
   c) Soit le point $F = f(B)$. Montrer que les points A , C et F sont alignés et placer le point F .
2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = f \circ R$.
   a) Déterminer $g(E)$.
   b) Montrer que g est une translation dont on déterminera le vecteur .
   c) En déduire que AEFD est un parallélogramme .
3. Soit h l'antidéplacement qui envoie A sur D et C sur A .
   a) Montrer que h est une symétrie glissante .
   b) Déterminer la forme réduite de h .
4. Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tel que $g(M) = h(M)$.



EXERCICE 3 :

Soit à résoudre dans N² l'équation $5^x - 4^x = y^2$

1°/ Vérifiez que (1.1) est solution de (E).

Dans la suite, soit x différent 1.

2°/ L'objet de cette question et de démontrer que x est pair

a) Démontrez que, si x est impair, alors $5^x - 4^x \equiv 5[\text{mod } 8]$

b) Concluez.

3°/ Soit x = 2m avec m ∈ IN

a) Démontrez qu'il existe deux entiers p et q tels que :

$5^m - y = 2^p$ et $5^m + y = 2^q$ avec p + q= 4m.

b) Déduisez en que : Si m ≠ 0 alors p = 1 , q =4m−1 et $5^m = 1 + 4^{2m-1}$

4°/ Déterminez les solutions de l'équation (E)

EXERCICE 4 :

I–1°) Déterminer l'ensemble Γ des primitives de la fonction : $x \mapsto -e^{x}\ln x - \dfrac{e^{x}}{x}$.

2°) Soit φ une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = e^{x}\varphi(x)$.

Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $\varphi(x) + \varphi'(x) = -\dfrac{1}{x} - \ln x$ si et seulement si g st un élément de Γ.

3°) En déduire toutes les fonctions φ.

II– Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1-x} - \ln x$.

1°) a) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^{+}} x\, f(x)$.

c) On pose $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{1} f(t)\,dt$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^{+}} F(x) = e$.

2°) Soit un entier $n \geq 2$.

a) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que $\dfrac{k}{n} \leq t \leq \dfrac{k+1}{n}$,

on a : $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leq f\ t\ \leq f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

b) Montrer alors que : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq F\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

En déduire que : $F\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq F\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

d) Etablir les égalités : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{1-\frac{k}{n}} = (e-1)\dfrac{1}{n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^{n}}\right)$.

e) Calculer alors la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^{n}}\right)$,en déduire celle de (v_n) où

$v_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.