Sujet de révision n° 3

Exercice 1

1)

a) Montrer que si p un entier naturel impair alors $p^2 \equiv 1 \bmod 8$

b) Supposons que n est un entier naturel pair et x, y et z des entiers naturels impairs.
Montrer que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution.

2)

a) Montrer que si p un entier naturel pair alors
$p^2 \equiv 0 \bmod 8$ ou $p^2 \equiv 4 \bmod 8$

b) En déduire la résolution dans N² de l'équation $17x^2 - 31y^2 = 22$

3) Soit a, b et c trois entiers naturels impairs

a) Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et de $2(ab + bc + ca)$

b) En déduire que les entiers $(a^2 + b^2 + c^2)$ et $(2(ab + bc + ca))$ ne sont pas des carrés parfaits.

(On rappelle qu'un entier est un carré parfait s'il est le carré d'un entier)

c) L'entier $ab + bc + ca$ est-t-il un carré parfait ?

4) Soit n un entier naturel.

a) Déterminer le reste de la division de $2^n + 12^n + 2011^n$ par 3

b) En déduire n pour lequel $2^n + 12^n + 2011^n$ est un carré parfait

5) Dans cette question, a, b et c trois entiers consécutifs.

a) Montrer que si a, b sont impairs alors ils sont premiers entre eux

b) Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \bmod 9$

Exercice 2.

Soit un rectangle ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ et $AB = 2BC$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

1) Soit f l'isométrie tels que $f(A) = C$, $f(D) = B$ et $f(I) = J$

Montrer que f est une symétrie centrale dont on précisera le centre

2) Soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = C$ et $g(I) = J$

a) Déterminer $g(B)$ et montrer que g est une symétrie glissante.

b) Construire le point K image de O par g

3) Soient E et F les images respectives de C et D par g

a) Montrer que DCE est un triangle rectangle en D et de sens direct

b) Prouver que D est le milieu de [AE]

c) Montrer que le quadrilatère ABFE est un carré

d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $goS_{(AB)}$.

Identifier alors g

4) On pose $\varphi = S_{(IC)} o t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)}$.

a) Caractériser l'application $S_{(BC)} o S_{(IJ)}$.

b) En déduire que φ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle

5) On pose $h = t_{\overrightarrow{AE}} o S_{(IC)}$.

a) Caractériser l'application $h\, o S_{(AJ)}$

b) En déduire que h est une symétrie glissante et donner sa forme réduite

6) Soient Γ et Γ' les cercles de diamètres respectifs [AB] et [CD]. La droite (AC) recoupe Γ en M et la droite (CE) recoupe Γ' en M'.
On désigne par N le symétrique M' par rapport à (OI).
Montrer que les droites (MN) et (AD) sont parallèles.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}, \vec{v}$).

A tout nombre complexe z affixe de M, on associe le nombre complexe z' affixe de M' tel que z' = $\frac{1}{2}(3z - z^3)$.

1) Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par f

2) Déterminer l'ensemble (F) des points M tel que O, M, M' soient alignés

3) On pose z = $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et M' son image par f.

On désigne par *h* l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.

Soit le point K tel que et *h(M) = K*

Soit R la rotation de centre *K* d'angle 2α

a) Montrer que $R(M) = M'$.

b) Faire une figure dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$

4) Soit Γ le cercle de centre K et de rayon $\frac{1}{2}$ et © le cercle trigonométrique.

a) Montrer que Γ et © sont tangents en M

b) Montrer que M' $\in \Gamma$

5) Posons $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On note M'' le point diamétralement opposé à M sur Γ

a) Montrer que $(\overrightarrow{M'K}, \overrightarrow{M''K}) \equiv \pi - 2\alpha [2\pi]$.

b) En déduire M' $\neq$ M''

c) La droite (M'M'') coupe l'axe des abscisses en J.

Montrer que le triangle JOM'' est isocèle de sommet principal J

d) En déduire que (JM) est la tangente commune aux deux cercles

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul.

On désigne par f_n la fonction définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\ f_n(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Soit h la fonction définie par : $h(x) = x \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

a) Déterminer le domaine de définition D de h et étudier la continuité et la dérivabilité de h sur D.

b) Etudier les variations de h' fonction dérivée de h

2) Dans cette question, $x \in]-1, 0[$

a) Montrer $h'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1, 0[$.

b) Donner une valeur approchée α à 10^{-1} près et donner le signe de h' sur D.

3)

a) Montrer qu'il existe une fonction f continue pou tout réel $x \neq -1$ et telle que $f(x) = h(x)$ pour tout $x \in D$

b) Etudier la dérivabilité de f et dresser son tableau de variations.

c) Tracer C courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Soit σ l'application de P dans P telle que pour tous points $M(x,y)$,

$M'(x',y')$, $\sigma(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x-1 \\ y'=y \end{cases}$

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par σ

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de σ

c) Soit C' l'image de C par σ. Déterminer la fonction g telle que pour tout point M du plan P, $M(x,y)\in C' \Leftrightarrow g(x)=y$

d) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.

5) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que $f(n)<1<g(n)$

b) En déduire $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

c) Montrer que $\frac{2}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}$

d) Donner une valeur approché de e à 10^{-3} près.

6) On considère la suite (A_n) définie par $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n

b) Vérifier l'existence de la suite (A_n) et l'interpréter graphiquement.

c) Montrer que $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

7) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\left(C_{n+1}^k(-1)^{n-k}\left(\frac{2^k-1}{k(n+1)}\right)\right)$

On pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln x\,dx$, $J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$ et $F_n(x) = \int_x^1 t^n \ln t\,dt$, $x \in]0,1]$

a) Déterminer $F_n(x)$ en fonction de x, en déduire I_n en fonction de n.

b) Montrer que $J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n$

c) Montrer que $J_n = \frac{\left(1+(-1)^n\right)\ln 2}{n+1} + u_n$

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$