EXERCICE 1 :(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD

tel que AB=2AD =2 et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [DC].

1.On pose $f = t_{\overrightarrow{JB}} o R_{(J,-\frac{\pi}{2})}$.

a. Identifier $S_{(IC)} o S_{(AJ)}$ et $S_{(AJ)} o S_{(IJ)}$.

b. Déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2.On pose $g = f o S_{(JD)}$.

a. Déterminer g(D) et g(J) .

b. Montrer que g n'admet pas de point invariant.

c. En déduire que g est une symétrie glissante .Déterminer alors l'axe Δ de g et son vecteur $\vec{u}$.

3.Pour tout point M du plan on considère les points M_1=g(M) et $M_2 = t_{\overrightarrow{DI}}(M)$.

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite que l'on déterminera.

4.On muni le plan d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$ et soit φ l'application qui à tout point M d'affixe z on associé le point M' d'affixe z' tel que $z' = -i\bar{z}+3+i$

a.Montrer que φ est une isométrie.

b.Déterminer l'ensemble des points invariants par φ et déduire la nature de .

c. Montrer que φ o φ est une translation et déduire le vecteur et l'axe de φ

d.Prouver que φ =g.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$

On désigne par Cf_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser selon la parité de n le tableau de variation de f_n.
2. Construire Cf_1 et Cf_2
3. Soit la fonction Ψ définie sur $[-1,1]$ par : $\Psi(x) = \int_0^x f_2(t)dt$).

Et Soit la fonction F définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(\theta) = \Psi(\sin\theta)$.

a .Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée

b. Montrer que pour tout réel θ de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $F(\theta) = \frac{\theta}{8} - \frac{1}{32}\sin(4\theta)$

4. En déduire la valeur de $A = \int_{-1}^{1} f_2(x)dx$ .Que représente la valeur trouvée ?
5. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes Cf_1 et Cf_2
6. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

b.Montrer que $I_{2n} = \pi.\frac{(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+1)!}$

EXERCICE 3 : (5 points)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$.

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t \,.\, \sin^n t}{1-\sin t}\,dt$ et $U_n = 1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2+.....+\frac{1}{n}\times(\frac{1}{2})^n$

1. Montrer que pour tout réel t de $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$\cos t(1+\sin t+\sin^2 t+\sin^3 t+...+\sin^{n-1} t)=\frac{\cos t}{1-\sin t} - \frac{\cos t.\sin^n t}{1-\sin t}$

2. a- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$. $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

   b- En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

3. a- Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{1-\sin t}dt - U_n$

   b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

EXERCICE 4 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

1. Montrer que f est une bijection de $]-1,1[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur I.

3. On désigne par Cf et Cf^{-1} les courbes représentatives de f et f^{-1} dans le plan rapporté à un même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer avec soin Cf et Cf^{-1}

4. Soit la fonction F définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(\theta)=\int_0^{\sqrt{\sin\theta}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

a-Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ $F'(\theta)=\frac{1}{2}$

b- En déduire $F(\theta)$

c- Calculer $A=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ Que représente la valeur trouvée.

d- En déduire la valeur de $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} f^{-1}(x)dx$