Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$.

Alors I est égale à

a) 3 . b) $\frac{1}{4}$. c) $-\frac{1}{4}$.

2) Soit $\ell = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\right]$, alors

a) $\ell = 1$. b) $\ell = 0$. c) $\ell = +\infty$.

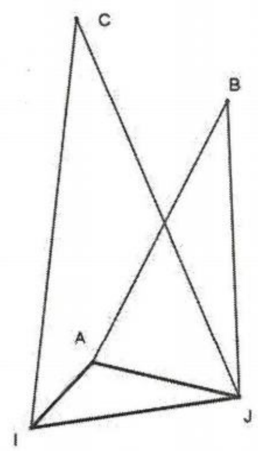
3) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.

Alors

a) $n \equiv 0 \pmod 3$. b) $n \equiv 0 \pmod 5$. c) $n \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1) a) Déterminer $r_C(I)$.
b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

2) Soit K = t (C).

Montrer que BC = BK et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

a) Soit O le milieu de [AC].
Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 5 (6 points)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x)=x^2-\ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2, $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x)=x^k-\ln x$.

a) Déterminer f_k' la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$ égal à $\dfrac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x,x^k)$ et $M(x,\ln x)$.

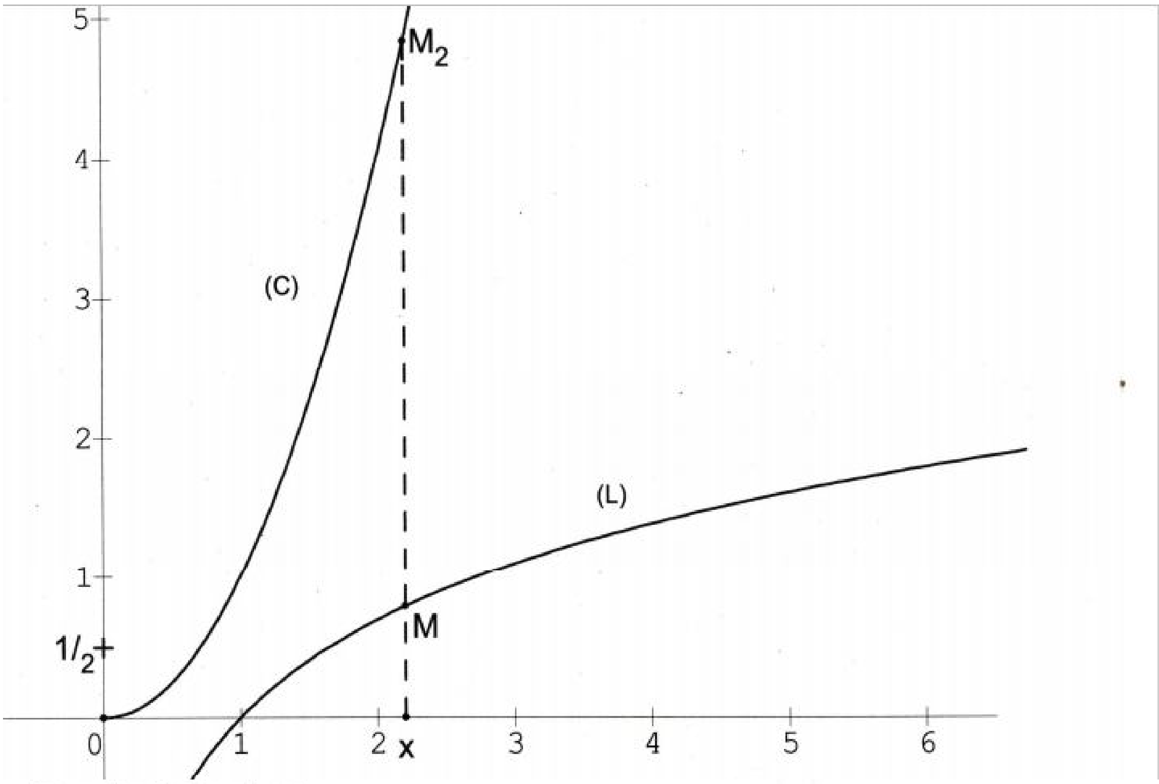
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k=\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\dfrac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.



<u>Exercice 3</u> (4 points)

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq q$ et $q \equiv p \pmod 4$.

a) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 5$.

b) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 2$.

c) En déduire que $a^q \equiv a^p \pmod{10}$.

3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $25x - 21y = 4$.

a) Vérifier que $(1,1)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) Soit (α, β) un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5, n^α et n^β ont le même chiffre d'unité.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right]$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\dfrac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}\right) = e^{-\sqrt{2}}$.

b) En écrivant $\dfrac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \dfrac{-\left(\ln x + \sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \cdot \dfrac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}$, montrer que $\lim\limits_{x \to (e^{\sqrt{2}})^-} \left(\dfrac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}}\right) = -\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

2) On donne, ci-dessous, le tableau donnant le signe de $f''(x)$, le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.

x	$e^{-\sqrt{2}}$		e^{-1}		α		β		$e^{\sqrt{2}}$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0			$-$			
f	0	$\nearrow$	e			$\searrow$			0

Justifier que les points C et D, de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$, sont deux points d'inflexion de C_f.

3) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct ;

A et B sont les points de coordonnées respectives $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$;

C et D sont les points de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$;

Γ est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

a) Construire les points de C_f d'abscisses $e^{-\sqrt{2}}$, e^{-1} et $e^{\sqrt{2}}$.

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x)=\sin x$.

a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

On note h sa fonction réciproque.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et que $h'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Soit u la fonction définie sur $\left[e^{-1},e\right]$ par $u(x)=h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$.

Montrer que pour tout $x\in\left[e^{-1},e\right]$, $u'(x)=\frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) En déduire que $\int_{e^{-1}}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}=\frac{\pi}{2}$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=e^{-1}$ et $x=e$.

a) Montrer que $\mathcal{A}=2+\int_{e^{-1}}^{e}\left(\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\right)dx$.

b) Vérifier que pour tout $x\in\left[e^{-1},e\right]$, $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}=\frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}-f(x)$.

c) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.