Exercice 1 :

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machine A et B qui sont réglées de la façon suivantes :

- La probabilité de gagner sur la machine A est de $\frac{1}{5}$.
- La probabilité de gagner sur la machine B est de $\frac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter le stratégie suivante :Il commence par choisir une machine au hasard, après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner. On définie pour tout $n \geq 1$ les événements suivants :

G_n : le joueur gagne la $n^{ième}$ partie. A_n : la $n^{ième}$ partie se déroule sur la machine A.

1)Déterminer la probabilité de gagner la première partie.

2)Montrer que $p(G_2) = \frac{31}{200}$.

3)sachant que la deuxième a été gagnée , quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine A.

4)Soit $n \geq 1$. On pose $p_n = p(A_n)$ et $q_n = p(G_n)$.

a)Montrer que $q_n = \frac{1}{10} p_n + \frac{1}{10}$.

b)Montrer que $p_{n+1} = -\frac{7}{10} p_n + \frac{9}{10}$.

c)On pose $v_n = p_n - \frac{9}{17}$, montrer que la suite (v_n) est géométrique puis déduire p_n et q_n en fonction de n.

d)Déterminer la limite de q_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2:

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$. On désigne par O le milieu de $[BC]$ et par I le barycentre des points pondérés $(A, \sqrt{2})$ et $(B,1)$.

1)Montrer que $AI = AC$.

b)Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que $f(C) = I$ et $f(I) = B$.

c)Prouver que f est une rotation, préciser son angle et construire son centre ω.

d)Montrer que ω appartient au cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC et que $(\overrightarrow{B\omega}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$.

2)La parallèle à la droite (AC) passant ω recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en F.

a)Déterminer $f((\omega A))$. En déduire $f(A) = F$.

b)Montrer que les points C, I et F sont alignés.

3)Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives des segments $[\omega F]$, $[FB]$ et $[BA]$.

On note $g = S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

a)Montrer que g est une symétrie orthogonale.

b)Déterminer $g(\omega)$, en déduire que $S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_2} = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

4)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :

$\varphi = S_{(CF)} \circ S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{(AB)}$ et $\psi = T_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{\Delta_3}$.

Exercice 3:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Placer les points $A(1)$, $B(j)$ et $C(j^2)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O.

2) Désignons par I, K et L les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BA]$ et $[AC]$.

a) Caractériser l'antidéplacement qui envoie B en C et K en I

b) Définir la transformation $\varphi = f^{-1} \circ S_{(AC)}$

3) On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales respectivement par rapport aux droites (OA),(OB) et (OC) et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, $M_1 = S_1(M)$, $M_2 = S_2(M)$, $M_3 = S_3(M)$.

a) Montrer que $M_2 = r \circ r(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$.

b) Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral lorsque M est distinct de O.

4) Soit M un point quelconque du plan P, d'affixe z non nul.

Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}, j^2 z$ et $j\bar{z}$.

5) Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC).

a) Montrer que le point I est le milieu du segment $[M_1M_4]$.

b) En déduire que l'affixe de M_4 est $Z = -1 - \bar{z}$.

6) a) Montrer que les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $\frac{-1 + j^2\bar{z}}{j^2\bar{z} - jz}$ est réel.

b) Déduire l'ensemble des points M tels que les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés.

$\left(\textit{On rappelle que}: 1 + j + j^2 = 0, j^2 = \bar{j} \textit{ et } j^3 = 1\right)$.

Problème

I)Soit $n \in \mathbb{N}^*$.On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

On appelle $(\mathcal{C}_n)$. La courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)Etudier les variations de f_n.

2) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet deux points d'inflexion A_n et B_n.

Montrer que A_n et B_n restent sur une même droite quand n varie.

3)Tracer les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_3)$.

4) On pose , pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

a)Justifier l'existence de u_n et étudier la monotonie de la suite (u_n).

b)Montrer que :pour tout $n\geq 2$; $0\leq\int_0^{\frac{1}{\ln n}} e^{-nt^2}dt\leq\frac{1}{\ln n}$.

c)Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour $n\geq n_0$ on a : $\frac{1}{\ln n}\leq 1$.

d) Montrer que pour tout $n\geq n_0$ on a: $0\leq\int_{\frac{1}{\ln n}}^{1} e^{-nt^2}dt\leq\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)e^{-\frac{n}{\ln n^2}}$.

e)En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

II/ On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par: $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

1)Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}$ et montrer que F est impaire.
2)Etudier les variations de F.

3)Vérifier que pour tout $t\in[2,+\infty[$, $e^{-t^2}\leq e^{-2t}$. En déduire que pour tout $x\in[2,+\infty[$, $F(x)-F(2)\leq\int_2^x e^{-2t}dt$.

b)En déduire que : pour tout $x\in[2,+\infty[$, $F(x)-F(2)\leq\frac{1}{2}e^{-4}$.

c)Montrer que F est majorée sur $\mathbb{R}$. En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L.
III/ On se propose dans cette partie de calculer la valeur de L.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}dt$.

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $0\leq f(x)\leq e^{-x}$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)Soit $x\in\mathbb{R}_+$,on considère la fonction g_x définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g_x(t)=F(x\tan t)$.

a) Montrer que g_x est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que $g_x'(t)=\frac{x}{\cos^2 t}e^{-x^2\tan^2 t}$.

b)En déduire que :pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\int_0^x e^{-t^2}dt=x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}e^{-x^2\tan^2 t}dt$.

3)Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x^2)$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$.

(On admettra que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}dt$).

4)Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=g(x)+\left(\int_0^x e^{-t^2}\right)^2$.

Montrer que h est constante sur $\mathbb{R}$ puis calculer cette constant. En déduire la valeur de $L=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

5)En rassemblant les résultants précédents , donner l'allure de la courbe représentative de F.