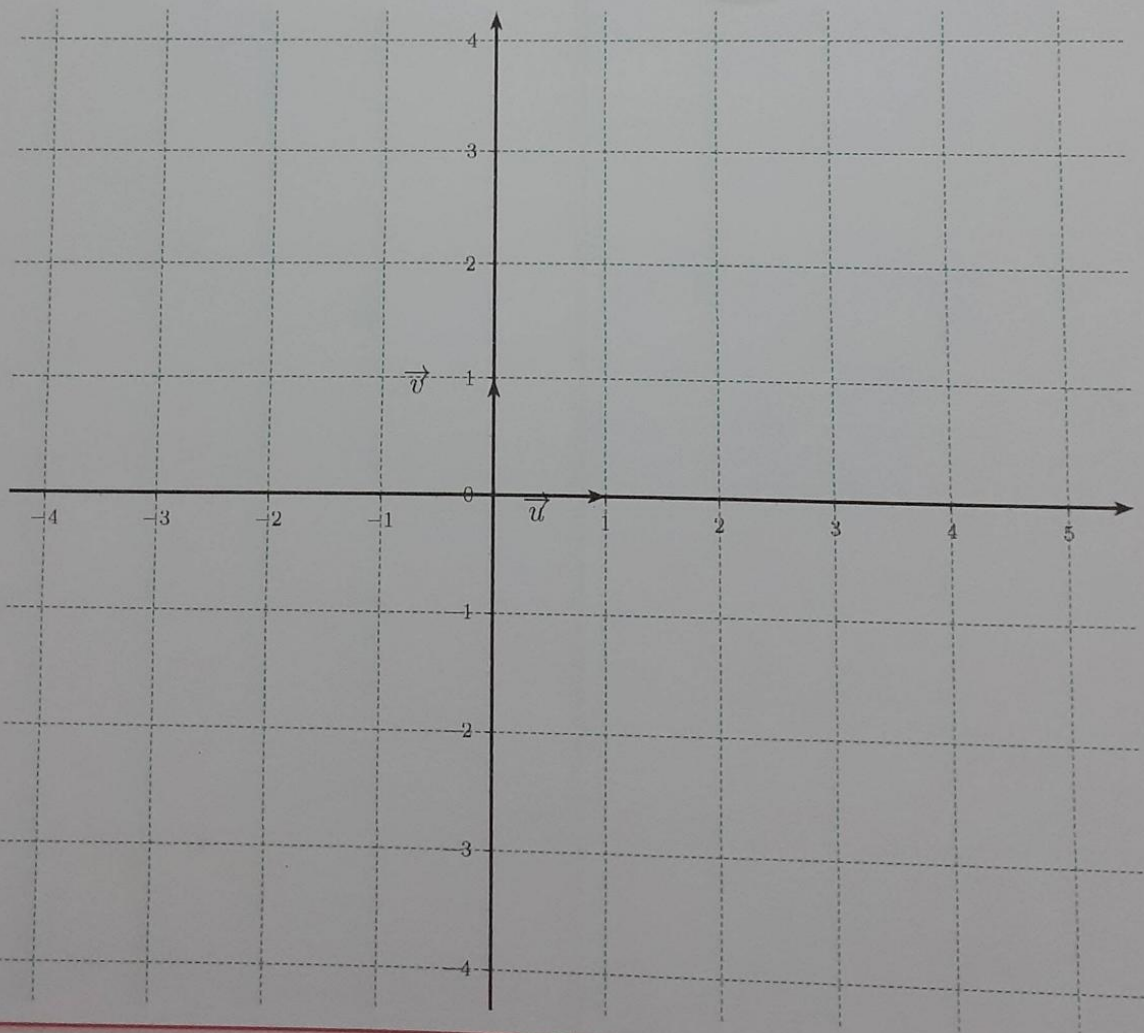
Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point M_n d'affixe : $z_n = \dfrac{16}{3-i}\left[1 - \left(\dfrac{i-1}{2}\right)^n\right]$.

1. (a) Placer les points M_0, M_1 et M_2 sur la figure ci-dessous.
   (b) Quelle est la nature du triangle $M_0M_1M_2$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+3} est le milieu de $[M_nM_{n+1}]$.
   Placer alors les points M_3 et M_4.
   (b) Quelle est la nature des triangles $M_1M_2M_3$ et $M_0M_2M_4$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{z_{n+2} - z_{n+1}}{z_{n+2} - z_n} = i$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_nM_{n+1}M_{n+2}$ est un triangle rectangle et isocèle direct.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_nM_{n+2}M_{n+4}$ est un triangle rectangle.
4. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = M_nM_{n+1}$ et $v_n = M_{2n}M_{2n+2}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{8}{(\sqrt{2})^n}$ et $v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n-2}}$.
   (b) En déduire les aires a_n et b_n respectives des triangles $M_nM_{n+1}M_{n+2}$ et $M_{2n}M_{2n+2}M_{2n+4}$ en fonction de n.
   (c) Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle $10^6 \times b_n < a_n$.



موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
anned by TapSc
bac Math

Exercice 2 :

1. Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}-1$.
   On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormeé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x$. Interpreter graphiquement.
   (b) Étudier la dérivabilite de h à droite en 0. Interpreter graphiquement.
   (c) Étudier les variations de h.
2. On donne dans l'annexe les courbes (Γ) et (Γ') représentent respectivement les fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ définies sur $]0,+\infty[$, et on admettra que (Γ) et (Γ') possèdent un seul point d'intersection A d'abscisses $\alpha>0$.
   (a) Vérifier que $B(\alpha,0)$ est le seul point d'intersection de $\mathscr{C}$ et la droite des abscisses.
   (b) Vérifier que $h'(\alpha)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$.
   (c) Construire la tangente T à $\mathscr{C}$ au point B.
   (d) Tracer $\mathscr{C}$, en précisant la demi-tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse zéro.
3. Soit n étant un entier naturel tel que $n\geq 2$.
   On note g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt[n]{x}}e^{\frac{x}{2}}-1 & si\quad x>0\\ -1 & si\quad x=0\end{cases}$
   (a) Montrer que g est continue à droite en 0. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖ +	
g	-1	$+\infty$

   Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha_n\geq 0$, puis que $0<\alpha_n<1$.
   (c) Étudier suivant les valeurs du réel $x>0$, le signe de $g(x)$.
4. (a) Montrer que pour tout $x>0$, $\quad 1-\dfrac{1}{x}\leq\ln x\leq x-1$.
   (b) Déduire que pour tout $n\geq 2$, $\quad\dfrac{\alpha_n^2}{n-1}\leq 1-\alpha_n\leq\dfrac{\alpha_n}{n-1}$ puis que $\alpha_n\geq\dfrac{n-1}{n}$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$, puis $\lim n+\infty n\left(1-\alpha_n\right)$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=1$.
5. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=e^{\frac{x}{n}}-\sqrt[n]{x}$.
   (a) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}\times g(x)$.
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Montrer que f admet un minimum β_n sur $]0,+\infty[$ et que $\beta_n=\sqrt[n]{\alpha_n}\times\dfrac{1-\alpha_n}{\alpha_n}$

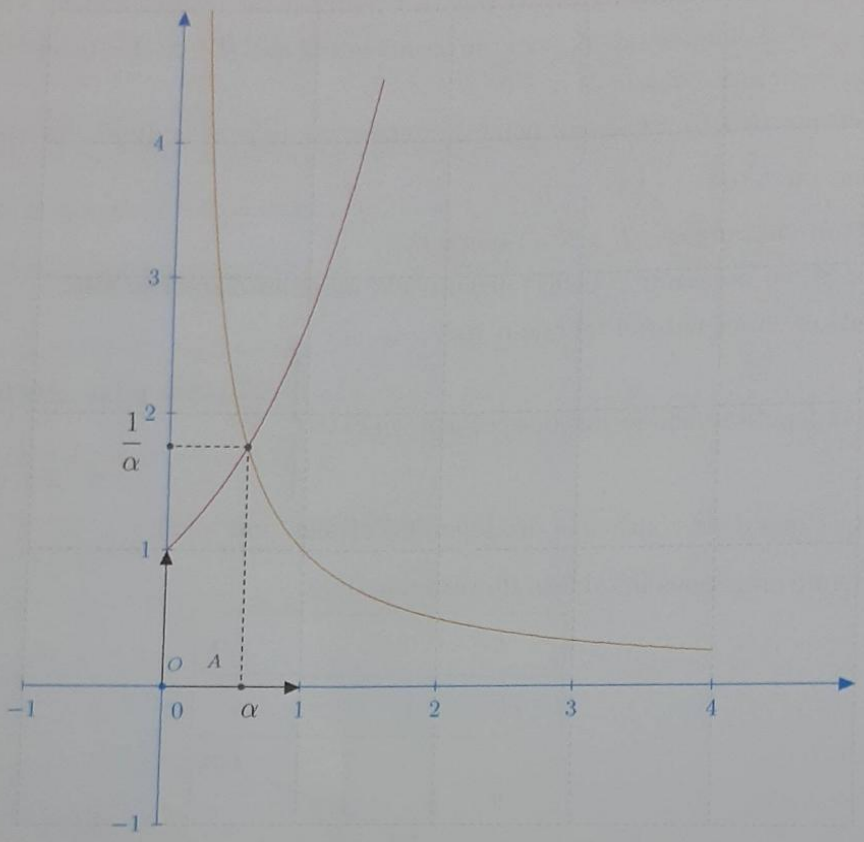
موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
anned by TapSc
bac Math

6. On note $\mathscr{C}_n$ et Γ_n les courbes représentatives respectives des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par : $x \mapsto e^{\frac{x}{n}}$ et $x \mapsto \dfrac{\sqrt[n]{x}}{x}$.

On note $\mathscr{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_n$ et Γ_n et les droites d'équations$x = \alpha_n$ et $x = 1$.

(a) Montrer que $\mathscr{A}_n = nf(1) - n\beta_n$

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n$.



Exercice 3 :

Une caisse d'assurance maladie propose à ses affiliés une modalité d'hospitalisation m.
Les employés d'une entreprise sont tous affiliés à cette caisse d'assurance et on sait que :

- Le $\frac{1}{3}$ des employés choisissent la modalité m.
- Parmi les employés qui ont choisi la modalité m , 80% sont atteints dune maladie chronique.
- Parmi les employés qui n'ont pas choisi la modalité m, 75% sont atteints d'une maladie chronique.

On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :
M "L'employé choisit la modalité m".
C : "l'employé est atteint d'une maladie chronique".

1. (a) Déterminer les probabilités suivantes : $p(M); p(C/M)$ et $p(C/\overline{M})$.
   (b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
2. (a) Calculer la probabilité que cet employé ait choisi la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.
   (b) Calculer la probabilité que cet employé n'ait pas choisi la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
anned by TapSc
bac Math

(c) En déduire $p(C)$.

3. Soit l'événement E : l'employé choisit la modalité m , sachant qu'il est atteint d'une maladie chronique. Montrer que $p(E) = \frac{8}{23}$.

Exercice 4 :

On donne dans la figure ci-dessous, un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, $[BC]$ un diamètre de $\mathscr{C}$.
A le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et I le point du segment $[AB]$ tel que $AI = AC$.

1. (a) Montrer que : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$.

   (b) En déduire que le triangle IBC est isocèle en I.

2. (a) Montrer qu'il existe une unique rotation f qui envoie C sur I et I sur B.

   (b) Montrer que f est d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   (c) Soit Ω le centre de f.
   Caractériser $f \circ f$. En déduire que Ω appartient à $\mathscr{C}$ et que O, I et Ω sont alignés.
   Placer alors Ω.

3. La médiatrice du segment $[IB]$ recoupe $\mathscr{C}$ en un point J.

   (a) Montrer que le triangle ΩIA est isocele en Ω et que C, I et J sont alignés.

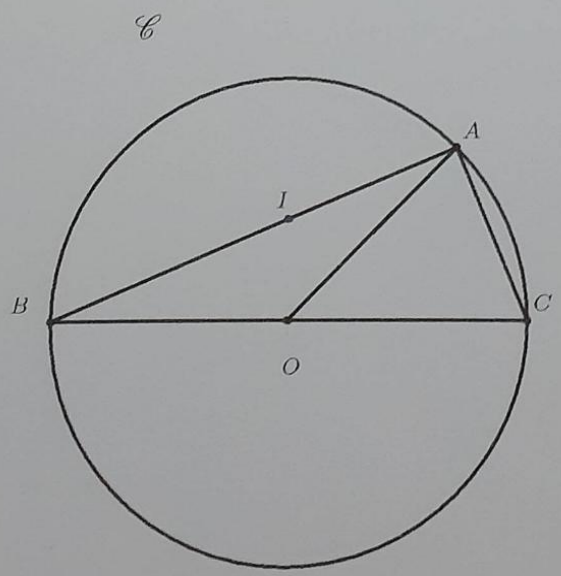
   (b) Caractériser $S_{\Omega I} \circ S_{\Omega A}$. En déduire $f(A)$.

4. Soit g l'antidéplacement qui envoie C sur I et I sur B.

   (a) Montrer que g est une symétrie glissante.
   Préciser le vecteur de g et construire son axe Δ.

   (b) Déterminer les images de I et C par $g^{-1} \circ f$ puis caractériser $g^{-1} \circ f$.

   (c) Soit K le symétrique de A par rapport a (IC). Montrer que $g(K) = J$.



موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
anned by TapSc
bac Math

Exercice 5 :

A) On considère l'équation $(E) : x^2 - 8y^2 = 1$ où $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1. Vérifier que le couple $(3, 1)$ est une solution de (E).
2. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout entier n, le couple (x_n, y_n) est une solution de (E).

   (b) Montrer que pour tout entier n, $x_n > 0$ et $y_n \geq 0$.

   (c) Montrer que pour tout entier n, $x_{n+1} > x_n$.

   (d) En déduire que (E) admet une infinité de couples de solution.

B) Un entier n est appelé un `nombre puissant` lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe 2 nombres entiers consécutifs inférieurs à 10, qui sont puissants.
   On se propose de montrer, à l'aide des résultats de la partie **A)**, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissant et de trouver quelques exemples.
2. Soient a, b deux entiers naturels.
   Montrer que $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.
3. (a) Montrer que si (x, y) est un solution de l'équation (E) définie dans la partie **A)**, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

   (b) En déduire qu'il existe une infinité de couples de nombres consécutifs puissants.

   (c) Déterminer deux entiers consécutifs puissants supérieures strictement à 2021.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
anned by TapSc
bac Math