SUJET 04

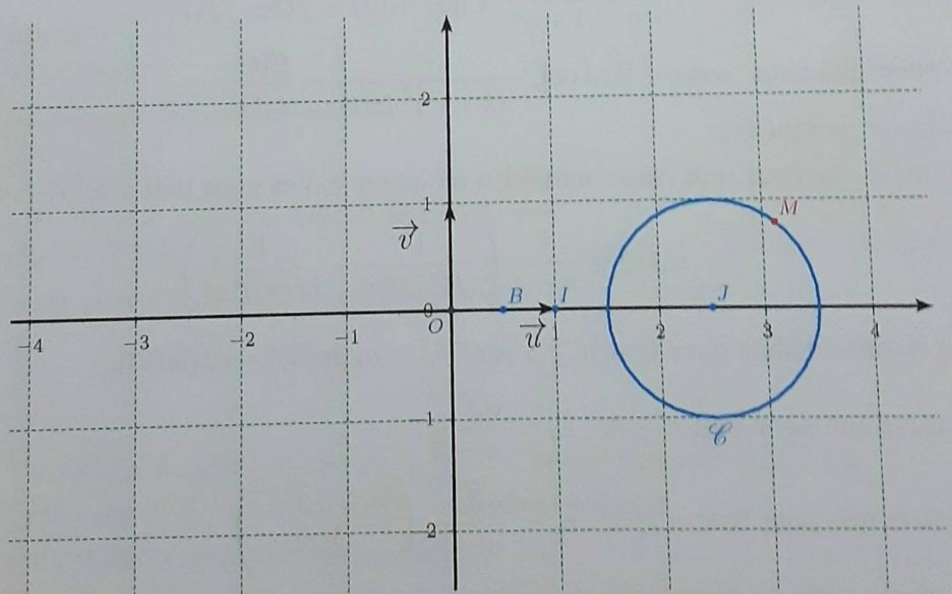
Exercice 1 :

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points $I(1)$, $J\left(\frac{5}{2}\right)$, $A(2)$ et $B\left(\frac{1}{2}\right)$.

Soit M le point d'affixe z distinct de 2 .

On note N le point d'affixe $\bar{z}$, M' le point d'affixe : $z' = \dfrac{1-2\bar{z}}{z-2}$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre J et de rayon 1.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y deux réels.
   (a) Montrer que $z' = z \iff z^2 - 2(z - \bar{z}) - 1 = 0$.
   (b) En déduire que $z' = z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y(x-2) = 0 \end{cases}$
   (c) Déterminer alors sous forme algébrique, les affixes des points M tel que : $M' = M$.
2. Montrer que : $\dfrac{z'-2}{\bar{z}-2} = \dfrac{5-4\mathrm{Re}(z)}{|z-2|^2}$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Montrer que : $M' = A$ si et seulement si M appartient à la médiatrice de $[AB]$.
4. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que $M' = N$.
5. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$.
   (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, $\left|z - \frac{1}{2}\right|^2 = 4|z-2|^2 \iff \left|z - \frac{5}{2}\right|^2 = 1$.
   (b) En déduire que $OM' = 4$. Interpréter graphiquement le résultat.
   (c) Dans la figure ci-dessous on a placé le point M sur le cercle $\mathscr{C}$. Construire le point M'.



Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement.

2. (a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{x}} \sqrt{\dfrac{1}{x(e^x+1)}}$.

   En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2 f(x)}$.

   (c) Dresser le tableau de variations de f.

   (d) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

3. On pose pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan(x)$.

   (a) Montrer que g est une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) - g^{-1}\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)$.

   (b) En déduire que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$ est égale à : $\ln(2+\sqrt{3}) - \dfrac{\pi}{3}$.

5. On pose pour tout $x \in [1, +\infty[$ et pour tout entier naturel n, $u_n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2 f^n(t)} dt$.

   (a) Montrer que $u_0(x) = \dfrac{1}{1+e} - \dfrac{1}{1+e^x}$ et que $u_1(x) = f(x) - f(1)$.

   (b) Vérifier que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2 f^2(t)} = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$.

   Calculer alors $u_2(x)$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 3$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{(f(1))^{n-2}} - \frac{1}{(f(x))^{n-2}}\right)$$

6. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \geq 3$ par : $v_n = u_n(\ln(3)) - u_n(\ln(2))$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $v_n = \dfrac{\sqrt{3}^{n-2}}{n-2}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $v_n = \dfrac{\sqrt{3}^{n-2}}{n-2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}^{n-2}\right)$.

   (c) Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{(n-2)\ln(\sqrt{3})}}{n-2} = +\infty$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

   (d) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $\ln(v_n) = \ln\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}^{n-2}\right) + (n-2)\ln(\sqrt{3}) - \ln(n-2)$.

   Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{v_n} = \sqrt{3}$.

Exercice 3 :

Dans un magasin spécialisé en ordinateurs portables, les clients ont le choix entre :

- deux tailles d'écrans différentes,10 pouces ou 13 pouces.
- deux systèmes d'exploitation différents, Windows ou Linux.

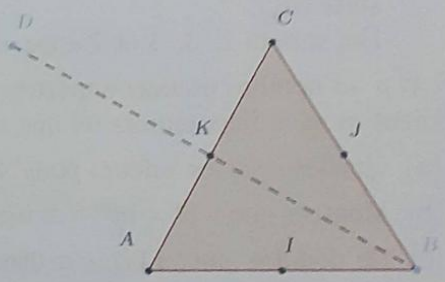
Selon le responsable du magasin :

- 60% des clients optent pour un modèle 10 pouces.
- 45% des clients achetant un modèle 10 pouces ne choisissent pas Windows.
- 80% des clients achetant un modèle 13 pouces choisissent Windows.

On considère les événements suivants :
M « le client achète un modèle 10 pouce ».
W « le client achète un modèle Windows ».

1. Traduire par des probabilités les pourcentages donnés ci-dessus.
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation précédente.
3. Un client souhaite acheter un ordinateur portable :
   (a) Quelle est la probabilité qu'il choisisse un modèle 13 pouces équipé de Windows ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il choisisse un modèle 10 pouces équipé de Windows ?
   (c) Montrer que $p(W) = 0,65$.
4. Un client sort du magasin avec un ordinateur portable équipé de Windows; Est-il juste d'affirmer qu'il y a plus d'une chance sur deux pour que ce client ait porté son choix sur un modèle 13 pouces ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 :



Le plan est orienté.
Dans la figure ci-contre :

- ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.
- Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
- Le point D est le symétrique de B par rapport à K.

1. Soit f l'isométrie du plan qui envoie A, B et C respectivement en C, A et D.
   (a) Vérifier que CAD est un triangle équilatréal indirect.
   (b) Montrer que f est un antidéplacement.
   (c) Montrer que f est une symétrie glissante d'axe (IK) que l'on précisera le vecteur.
   (d) On note $L = f^{-1}(I)$.
   En remarquant que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{IK}$, montrer que L est le symétrique de K par rapport à I.
2. On note $g = f \circ t_{\overrightarrow{JB}}$.
   Déterminer $g(I)$ et $g(K)$ puis déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
3. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(a) Montrer que : $r \circ S_{(CI)} = f$.

(b) Déterminer la droite Δ telle que $r = S_\Delta \circ S_{(AB)}$

(c) Soit M un point du plan, on note $N = f(M)$ et P est le symétrique de M par rapport à I tel que N et P soient distincts.

Montrer que la droite (NP) est perpendiculaire à (AJ).

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(I, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{IB}$. (On prendra $IB = 1$).

On considère l'application s du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z} - e^{-i\frac{\pi}{3}}$

(a) On note M'' le point d'affixe $-\overline{z}$. Montrer que M'' et M sont symétrique par rapport à la droite (CI).

(b) Déterminer la forme complexe de l'application $s \circ S_{(CI)}$. En déduire que $s \circ S_{(CI)} = r$.

(c) Pour tout entier naturel n, on définie les points B_n par :

— B_0 est confondu avec B

— Pour tout $n \geq 1$, $B_n = r(B_{n-1})$.

Déterminer le plus petit entier naturel $n > 2021$ tel que A soit le milieu du segment $[BB_n]$.

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $u_n = 2^n + 3 \times 7^n + 14^n - 1$.

1. (a) Calculer u_3.

(b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, u_n est pair.

(c) On note (Γ) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).

Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à (Γ) ?

2. Soit p un nombre premier supérieure strictement à 7.

Soient m et n deux entiers tel que $mn = 14$.

(a) Quelles sont les valeurs possible de m.

(b) Montrer que : $14 \times m^{p-2} \equiv n (\text{mod} p)$.

(c) En déduire que : $14u_{p-2} \equiv 0 (\text{mod} p)$.

(d) L'entier p appartient-il à (Γ).

(e) Déterminer (Γ).

3. Soit un entier naturel $m \geq 2$.

(a) Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que m et u_q ne sont pas premiers entre eux.

(b) En déduire qu'il existe un unique entier naturel n premier avec tous les termes de la suite (u_n).