Exercice 1 :5points

On définie la suite u = $(u_n)_{n\geq 0}$

par : u_0 = 1 et, pour n ≥ 0 $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{u_n}$,

1) a) Montrer que pour tout n on a : $u_n > 0$.

b) Etudier la monotonie de cette suite.

c) Déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) On pose, pour n ≥ 0 , $v_n = \frac{u_n}{2^n}$

a) Montrer qu'on a ; $0 < v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

b) En déduire que la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ est majorée par 2,

c) Déduire alors que la suite v est convergente.

Exercice 2:

On considère la suite u définie par :

$u_0 = \frac{3}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}u_n$.

1) a / Montrer que pour tout n, $0<u_n<1$

b / Montrer que u est convergente et calculer sa limite .

2) a / Montrer que tout n : $u_{n+1} \leq \frac{7}{8} u_n$

b) Déduire que pour tout n : $0< u_n < \frac{3}{4}(\frac{7}{8})^n$

c) Retrouver alors lim u_n.

Exercice 3:

Démontrer chaque réponse si elle est vrai

1)On considère (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$

a) Pour tout $n \geq 0$ *on a* $v_n \leq 1$.

b) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

c) Si (v_n) est convergente, alors (u_n) est convergente.

d) Si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.

2) Soit u la suite réelle définie par :

$u_0 = 0$ et pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+u_n}$

a) La suite u est convergente.

b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) On ne peut pas conclure.

3) Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

a) Si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

b) Si les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

4) Les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n >0 par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes

5) La suite u ; $u_n = n + (-1)^n$ tend vers +∞.

6) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq v_n \leq 1 \\ \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1 \end{cases}$ alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

7) La suite u définie sur IN par $u_n = \frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{2n+3}$ est convergente.

8) $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

9) (u_n) étant une suite définie sur IN.

a) (u_n) est convergente si et seulement si $(u_n)^2$ est convergente.

b) Si lim (u_n) = - ∞ alors la suite (u_n) est majorée à partir d'un certain rang.

Exercice 4 :

1) Soit x un réel positif, montrer que pour tout entier naturel n on a : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{n!}{n^n}$.

a) Montrer que : $\frac{U_n}{U_{n+1}} \geq 2$

b) Montrer alors que la suite U est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$.

d) Calculer alors la limite de U.

Exercice 5 : (6 points)

On considère la suite u définie sur N par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4-u_n^2}} 2 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout n de N on a : $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$

b) Etudier la monotonie de cette suite.

c) En déduire que la suite u est convergente et donner sa limite.

2) Soit v la suite définie sur N par : $v_n = \frac{u_n^2}{2-u_n^2}$

a) Montrer que v est suite arithmétique de raison 1.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, retrouver lim u_n

3) Pour tout n de N*, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{v_k}}$

a) Montrer que pour tout n de N* on a :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n+1}} \leq S_n \leq \frac{n}{n+\sqrt{2}}$$

b) Déterminer alors lim S_n.

Exercice 6:

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 + u_n + \frac{1}{1+u_n}$

1 / a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Montrer que $\lim u_n = +\infty$

2/ a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a: $1 + u_n < u_{n+1}$.

b) Mque $n + \frac{1}{2} \le u_n$; $n \in \mathbb{N}$

c) Retrouver alors que $\lim u_n = +\infty$

Exercice 7:

I/ Soit f la fonction définie sur IR* par $f(x) = 1+\frac{2}{x}$

1)Dresser le tableau de variation de f.

2)Déduire la monotonie de fof sur $[1, +\infty[$

II/ Soit la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1°) Dque $\forall$ n de IN on a: $1 \le u_n$

2°) On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que:

$v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

a) Vérifier que $v_{n+1} = fof(v_n)$ et que $w_n = f(v_n)$

b) Déduire que les suites v et w sont monotones.

3) a) Montrer que $v_n \le 2 \le w_n$ et que $3 \le v_n w_n$

b) Mque pour tout n on a :

$$0 < w_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{2}{3}(w_n - v_n)$$

c) Déduire que les deux suites v et w sont adjacentes.

4°) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 8:

Soit s la suite définie sur IN* par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1)a)Montrer que pour tout $n \ge 1$; $s_n \ge \frac{n}{\sqrt{n}}$

b)La suite s est-elle convergente ?

2) Vérifier que pour tout entier $n \ge 1$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

3) On considère les suites u et v définies sur IN* par :

$u_n = 2\sqrt{n} - s_n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a)Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\zeta} \frac{s_n}{2\sqrt{n}}$

Exercice 9 :(6 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur [0, 1] à valeurs dans [0, 1] et telles que pour tout x de [0, 1], f o g(x) =g o f(x).

On se propose de montrer qu'il existe un réel c de [0, 1] tel que f(c) = g(c).

1) Soit h la fonction définie par : h(x) = f(x) – x.

a) Montrer que h s'annule en au moins un réel a de [0, 1].

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \ge 1$) $g^n(a) = f\left[g^n(a)\right]$ où $g^n = \underbrace{gogo...og}_{\text{n fois g}}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN* par : $u_n = g^n(a)$.

a) Vérifier que $f(u_n) = u_n$ et que $g(u_n) = u_{n+1}$.

b) On suppose que la suite (u_n) est monotone.

Montrer alors qu'elle est convergente vers un rées ℓ

Que peut-on dire de $f(\ell)$ et $g(\ell)$?

c) On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.

Montrer qu'il existe deux réels p et q tels que le produit $(f-g)(p) \times (f-g)(q)$ soit négatif.

3) Conclure

Exercice 10:(6 points)

Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

1) a) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier n supérieur ou égal à k ;

$$\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$$

b) En déduire que pour tout n supérieur ou égal à k ; $\frac{x^n}{n!} \le \left(\frac{x}{k}\right)^n \cdot \frac{k^k}{k!}$

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

2) a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal 2, $\frac{n^{n-1}}{n!} \ge 1$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$

Exercice 11 (4 points)

On considère, pour chaque entier n >1, la fonction f_n définie sur IR+ par :

$f_n(x) = x^{n+1} + x^n + x^2 + x - 1$.

Soit $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante

b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$

2) a) Montrer que $f_n(x) = 0$ possède une seule solution que l'on notera u_n.

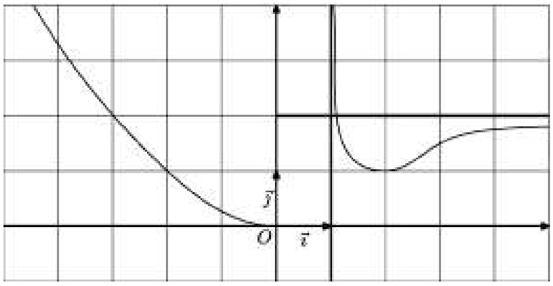
b) Montrer que pour tout n >1, $0 < u_n < \frac{2}{3}$

c) Montrer que (u_n) est convergente converge.

3) a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = \lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$

b) Calculer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 12:



Soients

g : [0,1] → [0,1] une application continue et strictement décroissante.

f : la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessus.

I/ 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $g \circ f$.

2) Dresser le tableau de variations de $g \circ f$ sur [-2, 0].

3) Calculer les limites éventuelles suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \frac{2x}{x+1})$; $\lim\limits_{x\to-2^+} gof(x)$;

$\lim_{x\to 0} f(\frac{\sin x+\tan 2x}{3x})$

II/

1) Montrer que pour tout n ∈ IN^*, il existe un unique réel a_n appartenant à [0,1] tel que $g(a_n) = a_n^n$.

(On pourra considérer la fonction $h_n(x) = g(x) - x^n$)

2) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

b) Déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers un réel ℓ.

3) a) Supposons que $\ell < 1$,

i) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = 0$

ii) Déduire que $g(\ell) = 0$

b) Conclure alors la valeur de ℓ.

Exercice 13:(7 points)

On considère la suite (v_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + \frac{1}{2^n}} \end{cases}$$

1) a) Déterminer v_1 et v_2.

b) Montrer que pour tout n de IN, $v_n \geq 0$.

2) a) Etudier les variations de la fonction f_n définie sur IR+ pour n ∈ IN par : $f_n(x) = x^2 - x - \frac{1}{2^n}$.

b) Montrer que l'équation $x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0$ possède dans IR+, une unique solution α_n.

c) Déduire que $\alpha_n = \sqrt{\alpha_n + \frac{1}{2^n}}$.

3) a) Etudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (α_n).

4) a) Comparer les nombres $(\alpha_2)^2$ et $(v_2)^2$.

b) Etablir par récurrence que pour tout n ≥ 2 on a $v_n \geq \alpha_n$.

c) En déduire que la suite (v_n) est décroissante pour n ≥ 2.

5) a) Montrer alors que la suite (v_n) est convergente.

b) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 14:(6 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) Soit u une suite à valeur dans]0, 1[telle que pour tout n : $4u_{n+1} > \frac{1}{1-u_n}$.

a) Etudier la monotonie de la suite (u_n). .

b) Déduire que (u_n) est convergente.

c) Montrer que $\lim(u_n) = \frac{1}{2}$.

2) Soit v la suite à valeur dans IR+ définie par $v_1=1$ et $(v_{n+1})^2 = 1+v_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence)

b) Montrer que pour tout n ≥ 1, $1 \leq v_n \leq 2$.

c) Prouver que la suite (v_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

d) Déduire alors la limite de la suite w définie par :

$$w_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1}}}} \text{ ; (n fois 1)}$$

Exercice 15 (5 points)

soit (u_n) la suite réelle définie par : et pour tout entier n ≥ 1, $u_{n+1} = \frac{n+u_n}{n^2}$

1) Montrer que si converge vers un réel l alors l = 0.

2) Soit (v_n) la suite réelle définie par : pour tout entier n ≥ 2, $v_n = \frac{n}{n^2-1}$

a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout entier n ≥ 2, $v_n \leq u_n$

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur IN\{0 , 1}

3)a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n \leq 2$.

b) En déduire que pour tout entier n ≥ 1, $\frac{1}{n} \leq u_{n+1} \leq \frac{n+2}{n^2}$

c) Calculer alors lim u_n et lim nu_n.