Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit m un nombre complexe non nul tel que : $|m|=r$ et $\arg(m)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

On désigne par M et A les points d'affixes respectives m et 1.

1) Déterminer r pour que $AM=1$.

2) Soit l'équation $(E_m): mz^2-(1+i)z+\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}=0$. On désigne par M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 les solution de l'équation (E_m).

a)Sans résoudre (E_m) montrer que $Arg(z_1+z_2)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

b)Montrer que : $m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right)=i$.

c)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

d)Ecrire sous forme exponentielle les solutions de (E_m).

3)Dans suite de l'exercice M étant un point du cercle trigonométrique.

a)Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que $\frac{i-z}{i+z}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $m\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right)\left(\frac{i+z}{i-z}\right)^2=1+i$.

Exercice 2:

Soit AIB un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et C le symétrique de A par rapport à (BI).

1) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que $f(A)=B$ et $f(B)=C$.

b) Identifier f.

2) Soit (Γ) le cercle de centre B et passant par I. Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que si M décrit (Γ) le point M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera et qu'on construira.

b) Soit Ω le point d'intersection de (Γ) et (Γ'). Montrer que si $M\in(\Gamma)\setminus\{I\}$, alors Ω, M et M' sont alignés.

3) Soit g l'antidéplacement définie par g(A)=B et g(B)=C.

a) Montrer que g est une symétrie glissante qu'on caractérisera.

b) Vérifier que $g=S_{(BC)}\circ R$ et déduire l'ensemble des points N du plan tels que g(N)=R(N).

Exercice 3 :

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer p(X = 2).

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. On lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que : $p(A)=\frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $D=[-2,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+2}\, e^{-\frac{x}{2}}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A /1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et que $f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2)Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}_+$,on a : $2e^{\frac{t}{2}}\geq t+2$. En déduire que $\forall t\in\mathbb{R}_+$ on a : $0\prec f(t)\leq\sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}}$.

B/ Soit F la fonction définie sur $I=\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right[$ par : $F(x)=\int_0^{\ln x}f(t)\,dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur I et que : $F'(x)=\sqrt{\frac{2+\ln x}{x^3}}$.

2) A l'aide de A/ 3), montrer que, $\forall x\in[1,+\infty[$, $0\leq F(x)\leq 4\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

3) En déduire que F admet une limite λ en $+\infty$ et que $\lambda\leq 4\sqrt{2}$.

Exercice 5 :

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$ si x > 0 et $F(0)=-\ln 2$.

1°)a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x > 0,

$F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.

b) Montrer que pour tout réel x > 0, $e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$. En déduire que F est continue à droite en 0.

2°)a) Montrer que pour tout réel x > 0, $F(x)\leq\frac{-e^x+1}{2x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

3°) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel x > 0, $F'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$.

4°) Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un réel c de $]0,x[$ tel que $F(x)-F(0)=xF'(c)$.

b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.