Lycée Pilote de Sfax *A/S 2019-2020*	*Série N°9* *Fonctions réciproques*	*Mr : Mourad EL arbi* $4^{ème}$ $Math_4$

1 I/ Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer C_f dans l'annexe (I).

② a) Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

b) On désigne par g la fonction réciproque de f. Tracer dans l'annexe (I) la courbe C_g de g.

c) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{-(g(x))^2}{\pi(1+x^2)}$.

II/ Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} h(x) = \frac{1}{g(x)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ h(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_h la courbe représentative de h dans un autre repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

① Montrer que h est continue sur $[0, +\infty[$.

② Déterminer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

③ Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

④ a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{3\pi} < h(x) < \frac{x}{\pi}$.

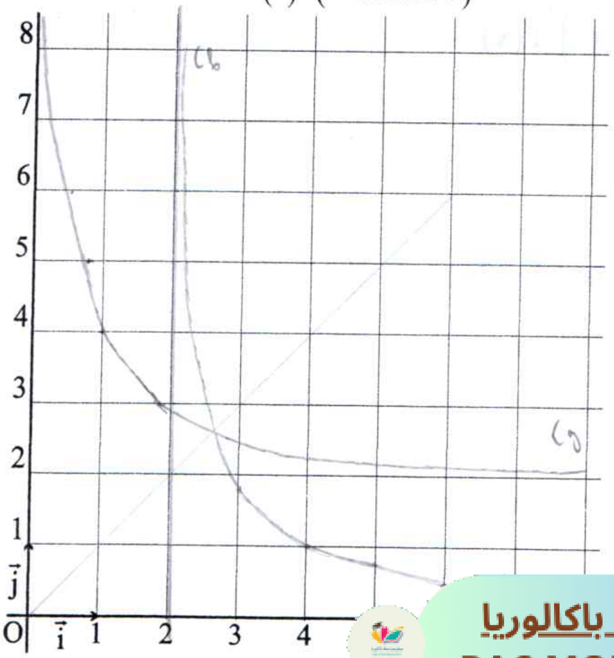
b) En déduire que h est dérivable à droite en 0.

c) On désigne par T_d la demi tangente à C_h au point d'abscisse 0.

Déterminer la position relative de C_h et T_d.

⑤ Tracer C_h dans l'annexe (II).

Annexe (I) (Exercice 3)



Annexe (II) (Exercice 3)