3 Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par E le symétrique de A par rapport à (BC).

Soit D, I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$ et $[EC]$.

① a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que $f(D) = E$ et $f(C) = B$.

b) Caractériser f.

② Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle JCD.

Soit M un point de l'arc $[\widehat{JC}]$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas D privé de J et C.

On désigne par S_I la symétrie centrale de centre I. On pose $g = S_I \circ f$ et $M' = g(M)$.

a) Déterminer $g(C)$ puis caractériser g.

b) Donner la nature du triangle CMM'.

c) Montrer que $g(J) = D$.

d) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'D}}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

e) En déduire que $MJ + MC = MD$.

③ Soit L le symétrique de J par rapport à la droite (DC). On pose $\varphi = g \circ S_{(IJ)}$.

a) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(D)$.

b) Caractériser φ.

4 Le plan est orienté dans le sens direct. Dans l'annexe ABC est un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$. Le point O est le milieu du segment $[BC]$.

① On désigne par I le barycentre des points pondérés $(A, \sqrt{2})$ et $(B, 1)$.

a) Montrer que $AI = AC$. $\left(\text{On donne } \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1\right)$.

b) Construire le point I.

① a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui envoie I sur B et C sur I.

b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.

c) Construire le centre Ω de f.

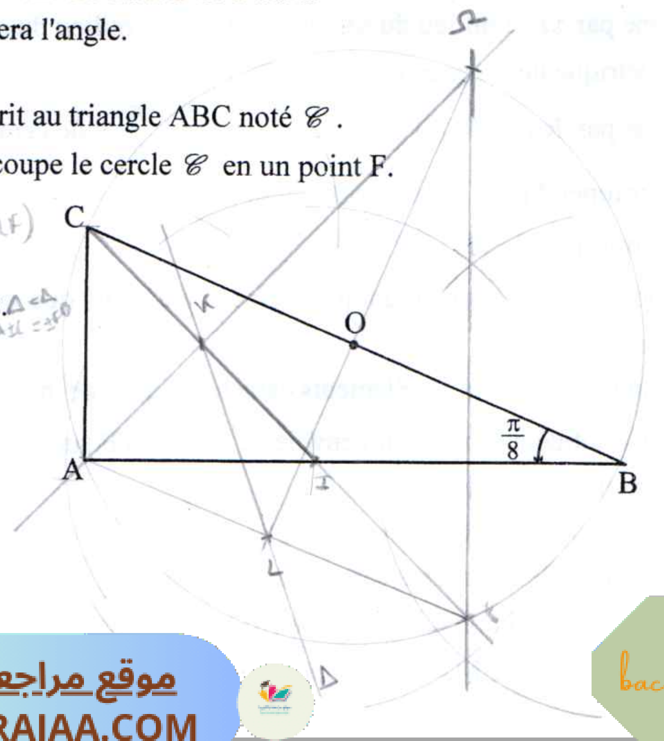
d) Montrer que Ω appartient au cercle circonscrit au triangle ABC noté $\mathscr{C}$.

② La parallèle à la droite (AC) passant par Ω recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point F.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega F}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. $(\widehat{CA\Omega}) = (\widehat{A\Omega F})$

b) Montrer que les points C, I et F sont alignés. $\Delta \simeq \Delta$ $A\Omega = \Omega F$

c) En déduire que $f(A) = F$. $\Delta = \Delta \Rightarrow OA\Omega = OF\Omega$



③ Soit $g = f \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer $g(A)$ et $g(C)$.

b) Montrer que g est une symétrie glissante.

c) Construire l'axe Δ de g.

d) Montrer que $S_\Delta(A) = O$.

e) En déduire la forme r