Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°7	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ $Math_4$

1 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+\sin x)}$.

① Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

② Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

③ Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer alors que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2 Soit ABC un triangle rectangle en C inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et tel que $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

On désigne par I le milieu de $[BC]$, D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de O par rapport à I.

① Justifier que $EC = AD$.

On se propose, dans la suite de l'exercice, de déterminer toutes les isométries f du plan telles que $f(E) = A$ et $f(C) = D$.

② Soit g une isométrie telle que $g = t_{\overrightarrow{AE}} \circ f$.

a) Déterminer $g(E)$ et $g(C)$.

b) Montrer que $g = R_{\left(E, \frac{-2\pi}{3}\right)}$ ou $g = S_{(ED)}$.

③ On suppose que $g = R_{\left(E, \frac{-2\pi}{3}\right)}$.

a) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que $t_{\overrightarrow{EA}} = S_\Delta \circ S_{(EB)}$ et $R_{\left(E, \frac{-2\pi}{3}\right)} = S_{(EB)} \circ S_{\Delta'}$.

b) Caractériser alors f.

④ On suppose que $g = S_{(ED)}$. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (ED).

Montrer que $f = t_{\overrightarrow{EH}} \circ S_{\Delta''}$ dont on précisera la droite Δ''.

⑤ Conclure.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math