Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°33	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ Math

1 On se propose de déterminer les entiers naturels n et y solutions de l'équation $(F): 3^n = 8 + y^2$.

① Déterminer selon n le reste modulo 8 de 3^n.

② Déterminer selon y, les restes modulo 8 de y^2.

③ Montrer que si n est une solution de (F) alors n est pair.

④ Conclure.

2 On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 23x - 26y = 1$.

① Vérifier que $(-9, -8)$ est une solution de (E).

② Déterminer l'inverse modulo 26 de 23.

③ Montrer que $17x \equiv 2 \pmod{26}$ si et seulement si $x \equiv 20 \pmod{26}$.

④ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 17x \equiv 2 \pmod{26} \\ x \equiv 19 \pmod{23} \end{cases}$

3 Soit n un entier naturel non nul.

① Soit l'équation $(E): 3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple d'entiers (u, v) tels que $3u + 7v = 1$.

b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

② Soit l'équation $(G): 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Montrer que si (x, y) est solution de l'équation (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c) Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes modulo 7 de 2^n.

d) Déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

4 ① Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 6x + 7y = 57$.

② L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation $6x + 7y + 8z = 57$. On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.

Déterminer les coordonnées de ce point.

③ On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair.

b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Monter que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.

Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$.

En déduire que q prend les val

d) En déduire les coordonn … nt des entiers naturels.