

4 Soit p un nombre premier tel que $p > 2$ et $E_p = \{n \in \mathbb{N}, n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}\}$.

- ① Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de p par 4.
- ② Déterminer E_5 .
- ③ On pose $p = 3 + 4k, k \in \mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

- a) Vérifier que $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$.
- b) Montrer que n et p sont premiers entre eux.
- c) En déduire que $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$.
- d) Déterminer E_p .