Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°23 Equations différentielles	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ Math

1 Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

① L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'-(\ln 3)y+\ln 9=0$ est l'ensemble des fonctions $x\mapsto k\,3^{x}+2,\ k\in\mathbb{R}$.

② Si f est la solution de l'équation différentielle $y'-\ln(2)y=0$ telle que $f(0)=1$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

③ Si f est une solution de l'équation différentielle $y''+4y=0$ alors $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=0$.

2 Un parachutiste tombe à la vitesse de $55\ m.s^{-1}$ au moment où son parachute s'ouvre.

On fixe l'origine du temps ($t=0$ en secondes) à ce moment-là.

Pour tout $t\geq 0$, on note $V(t)$ la vitesse en $m.s^{-1}$ et $d(t)$ la distance parcourue en mètres à l'instant t.

On admet que V est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et suit la loi $V'(t)=10\left(1-\frac{(V(t))^2}{25}\right)$ et que $V(t)\neq 5$ pour tout $t\geq 0$.

Par ailleurs, il a été établi que la distance parcourue à l'instant t est $d(t)=\frac{1}{V(t)-5}$.

① Montrer que d vérifie l'équation différentielle $(E): y'=4y+0,4$.

② Résoudre l'équation (E).

③ Déterminer l'expression de la distance $d(t)$ parcourue à l'instant t.

④ Exprimer alors $V(t)$ en fonction de t et calculer la limite de $V(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

3 L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé sous l'effet du rayonnement cosmique, en carbone 14, radioactif, noté ^{14}C. Les êtres vivants contiennent donc du ^{14}C qui est renouvelé constamment. A leur mort, il n'y a plus d'emprunt de ^{14}C à l'extérieur et le carbone ^{14}C qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être peut donc être évalué en mesurant la proportion de ^{14}C qui lui reste. Soit $N(t)$ le nombre d'atome de ^{14}C existant à l'instant t, exprimé en années, dans un échantillon de matière organique. On admet que la fonction $N: t\mapsto N(t)$ vérifie l'équation différentielle $(E): y'=(-0,0001238)y$.

① A l'instant $t=0$, le nombre d'atomes de ^{14}C est N_0, montrer que $N(t)=N_0\,e^{(-0,0001238)t}$.

② Le pourcentage d'atome de carbone perdu au bout de t années est donnée par la formule $\frac{100(N_0-N(t))}{N_0}$.

Quel est le pourcentage d'atomes de carbone perdus au bout de 20 000 ans ?

③ On appelle période du carbone ^{14}C, le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.

Déterminer, à un an près, la période du carbone ^{14}C.

④ On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte.

On constate qu'ils ont perdu 30% de leur teneur de carbone.

Déterminer, à un an près, l'âge