8 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1) $2x \equiv 6(\bmod 10)$

2) $2x \equiv 3(\bmod 5)$

3) $x^2 \equiv 0(\bmod 3)$

4) $x^2 \equiv 1(\bmod 3)$

5) $x^2 - 5x + 4 \equiv 0(\bmod 5)$

6) $x^2 + 2x + 4 \equiv 0(\bmod 3)$

9 Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le chiffre des unités des nombres 2^n et 7^n.

Trouver alors le chiffre des unités du nombre $A = 3548^9 \times 2537^{31}$

10 On admet que 1979 est premier.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $2x \equiv 1(\bmod 1979)$

2) On considère l'équation $(E): x^2 - x + 494 \equiv 0(\bmod 1979)$

a) Soit x solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$, déterminer le reste de $(x-990)^2$ par 1979

b) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$

11 1) Soit $x \in \mathbb{Z}$, déterminer le reste de la division euclidienne de x^3 par 9. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$x^3 \equiv 0(\bmod 9)$ *éq* $x \equiv 0(\bmod 3)$

$x^3 \equiv 1(\bmod 9)$ *éq* $x \equiv 1(\bmod 3)$

$x^3 \equiv 8(\bmod 9)$ *éq* $x \equiv 2(\bmod 3)$

2)Soient x, y, et z trois entiers relatifs tels que $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 9. Montrer que l'un des nombres x, y ou z est divisible par 3.

12 Soit le nombre $A = 10^{9n} + 2\times 10^{6n} + 2\times 10^{3n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Vérifier que : $10^3 \equiv 1(\bmod 111)$ et $10^3 \equiv -1(\bmod 7)$

2) Quel est le reste de la division de A par 111 ?

3) On suppose que n est impair : Montrer que A est divisible par 7, par 11 et par 13

4) On suppose que n est pair

a) Montrer que A-6 est divisible par 7 ; par 11 et par 13

b) Quel est le reste de la division de A par : 111×1001?

13 1) Déterminer suivant les valeurs de n, les restes modulo 9 de 2^n.

2) En déduire les valeurs de n tels que $2^n - 1 \equiv 0(\bmod 9)$.

3) Montrer que $2^x.11^y \equiv 1(\bmod 9)$ si et seulement si $x + y \equiv 0(\bmod 6)$.

4) En déduire le reste de la division euclidiénne de $2009^{2008}.20^{992}$ par 9.

5) Soit $N = a.11^2 + b.11 + c$ où a ; b et c sont des éléments de $\{0,1,2,\ldots,9\}$.

Montrer que si $N \equiv 0(\bmod 9)$ alors $(4a+c)^3 - b^3 \equiv 0(\bmod 9)$

14 Pour tout entier naturel n on pose $a_n = n.7^n + (n+1).7^{n+1} + (n+2).7^{n+2}$

1) Déterminer ,suivant n, le reste modulo 19 de 7^n

2) En déduire ,suivant n , le reste modulo 19 de a_n

3) a) Soit p un entier naturel tel que $p \equiv 0(\bmod 3)$. Montrer que $a_p + a_{p+1} + a_{p+2}$ est divisible par19

b) En déduire le reste modu