| Série d'exercices n°17 | $4^{ème}$ M |
|---|---|

**1** A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Déterminer une équation de la tangente T à $C_f$ au point A d'abscisse 1.
3) Construire $C_f$ et T dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
4) Soit l'équation $(E_n): f(x)=\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que pour $n=1$ ou $n=2$, $(E_n)$ n'a pas de solution.
   b) Montrer que pour $n\geq 3$, $(E_n)$ admet deux solutions $\alpha_n$ et $\beta_n$ où $\alpha_n\leq\beta_n$.

B) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$.

1) a) Etudier le sens de variation de g.
   b) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $-\dfrac{1}{2}x^2+x\leq\ln(1+x)\leq x$.
2) a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\leq x$.
   b) En déduire que pour tout entier $n\geq 4$, $f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leq\dfrac{1}{n}$.
   c) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\geq\dfrac{1}{2}x$.
   d) En déduire que pour tout entier $n\geq 4$, $f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\geq\dfrac{1}{n}$.
3) Montrer que pour tout entier $n\geq 4$, $1+\dfrac{1}{n}\leq\alpha_n\leq 1+\dfrac{2}{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.
4) a) Montrer que pour tout entier $n\geq 4$, $f(n)\geq\dfrac{1}{n}$.
   b) Comparer n et $\beta_n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$.

**2** ① Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|$.

a) Dresser le tableau de variation de g.
b) Montrer que g s'annule sur $]-\infty,3[$ pour une valeur de $\alpha$. Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0.1
c) Déterminer le signe de g.

② Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)\ln|x-3|$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
c) Tracer la courbe C.
d) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=2$.