

1 Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x \frac{1+e^t}{1+e^{2t}} dt$.

① Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et donner le sens de variation de F.

② Soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \int_1^{e^x} \frac{1+t}{t(1+t^2)} dt$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = G(x)$.

③ a) Vérifier que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\frac{1+t}{t(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_1^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + \ln \left(\frac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right)$.

④ Soit h la fonction définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $h(x) = \tan x$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur \mathbb{R} .

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{\pi}{4} + h^{-1}(e^x) + \ln \left(\frac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right)$.

⑤ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

b) Montrer que la droite $D: y = x - \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2})$ est une asymptote oblique à C_F au voisinage de $-\infty$.

c) Tracer une allure de la courbe C_F . (On précisera la tangente à C_F au point d'abscisse 0).

2 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

① a) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$, par $f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$.

② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n e^{\frac{-1}{4n}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.

③ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4} \ln(n+1)}$.

c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.