Série Suites réelles

Bac Maths

EXERCICE 1 :

Soit n un entier naturel, $n \geq 3$ et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$

1)a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solution a_n et b_n tel que $0 < a_n < 1 < b_n$

b) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

c) En déduire que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante

d) Montrer alors que (a_n) et (b_n) sont convergente

2) Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a ; $-\frac{2}{n} \leq a_n - 1 \leq -\frac{1}{n}$ et en déduire la limite de (a_n)

3) a) On admet que pour tout $n \geq 3$ on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. Montrer que $b_n > 1 + \frac{1}{n}$

b) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \geq 3$ on a ; $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$

c) En déduire que pour tout $n \geq 3$ on a ; $1 + \frac{1}{n} < b_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ et en déduire la limite de (b_n)

EXERCICE 2 :

Soit (u_n) la suite définie sur N* par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in$ N*, on a $u_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{n}{3^n}\right)$

b) En déduire que (u_n) est majorée par $\frac{3}{4}$

2) a) Montrer que (u_n) est convergente

b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{3^n} = 0$

c) Déterminer alors la limite de(u_n)

EXERCICE 3 :

Soit n un entier naturel $n \geq 3$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$ et soit α la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

1) Déterminer α et vérifier que $0 < \alpha < 1$

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que $0 < \alpha_n < \alpha$

3) Montrer que (α_n) est croissante et en déduire (α_n) et convergente

EXERCICE 4 :

Soit (v_n) la suite définie sur N* par $v_n = \frac{2^n\, n!}{(n+1)^n}$

1) Montrer que $\forall x > 0$ et $\forall n \geq 2$ on a ;$(1+x)^n > 1 + nx$

2) Simplifier $\frac{V_n}{V_{n+1}}$ et en déduire que (v_n) est décroissante

3) a) Montrer que pour tout $n \in$ N* on a $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n}$

EXERCICE 5 :

Soit $a \in]0, \frac{1}{2}[$. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

1 (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(b) Monter que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
(c) En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

2 On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^{n-1}$.
(b) En déduire que (S_n) est majorée par $\frac{4}{2-a}$.
(c) Prouver que (S_n) converge vers un réel l.

3 Soit $V_n = nu_n$ où $n \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{2n} \leq 2(S_{2n} - S_n)$ et que $V_{2n+1} \leq V_{2n} + u_{2n}$.
(b) En déduire la limite de la suite (V_n).

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.
(a) Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_{2n} \leq \frac{W_n + u_n}{2}$.
(c) Déterminer la limite de la suite (W_n).

5 Soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = -1 - V_{n+1} + S_n + u_{n+1}$.
(b) En déduire la limite de la suite (T_n).