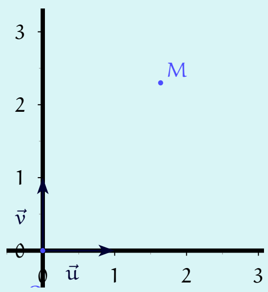
FEUILLE DE REVISION 7

Exercice .1

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On a placer le point $M(z)$ sur la figue ci-jointe. Soit le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$.

1. a) Construire le point A d'affixe $z_A = |z|$.
   b) Construire le milieu I de $[AM]$ et donner son affixe.
   c) Expliquer comment construire le point M' à partir du point M puis construire M'.
2. On pose $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = \left(\frac{z_n + |z_n|}{4}\right)$.
   a) Si z_0 est un réel négatif, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n|$.
   b) Si z_0 est un réel positif, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n|$.
   c) On suppose que z_0 n'est pas un réel.
      i) Vérifier que $|z_n + |z_n|| \leq 2|z_n|$.
      ii) Montrer par récurrence que $|z_n| \leq \frac{1}{2^n}|z_0|$.
      iii) Justifier le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$.



Exercice .2

Soit $n \in \mathbb{Z}$, On donne $a_n = n^5 - n$ et $b_n = n(n^2-1)(n^2-4)$.

1. a) Déterminer les restes respectifs dans la division Euclidienne de -2 et -1 par 5.
   b) Remplir Le tableau de congruence modulo 5 suivant :

n	0	1	2	3	4
n^2					
a_n					

   c) Déduire alors que $a_n \equiv 0[5]$.
2. Calculer $a_n - b_n$ et déduire que $b_n \equiv 0[5]$.
3. a) Soient x et y deux entiers Montrer que :

$$x^5 + y^5 \equiv 0[5] \text{ si et seulement si } x + y \equiv 0[5].$$

   b) Déterminer les entiers x vérifiant 5 divise $x^5 + 32$ et $0 \leq x \leq 20$.

Exercice .3

Soit z un nombre complexe. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $1+3i$, z^2 et iz.

1. Montrer que B est le milieu du segment $[CA]$ si et seulement si z est une solution de l'équation
$$(E) : -2z^2 + iz + 1 + 3i = 0.$$

2. a. Calculer $(4+3i)^2$.
   b. Résoudre alors l'équation (E).

3. On prend $z = -1 - \frac{1}{2}i$.
   a. Calculer iz.
   b. Sans calculer z^2, placer les points A, B et C.

Exercice .4

On définit sur $\mathbb{N}$ la suite u par $u_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   b. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
   c. Déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

2. Soit la suite v donnée par $v_n = \ln(u_n - 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que (v_n) est arithmétique et donner son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice .5

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x$.
   a. Dresser le tableau de variation de g.
   b. En déduire que pour tout réel x on a : $e^x - x > 0$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)(1+e^{-x})$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   c. i. Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote pour $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
      ii. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.
   d. Ecrire l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   e. Tracer Δ, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.

3. a. Vérifier que : $f'(x) + f(x) = 2 + x + e^{-x}$.
   b. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$.