REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4h** **COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de **1/4** à **4/4**

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

1) Le quotient de (– 23) par (–5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2 (\text{mod } 12)$.

4) $x^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$ équivaut à $x \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$.

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 (\text{mod } 4) \\ x \equiv 4 (\text{mod } 5) \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \ (\text{mod } 20)$.

6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe, [AB] et [IJ] sont deux diamètres perpendiculaires du cercle $(\mathscr{C})$, M est un point variable du cercle $(\mathscr{C})$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et MBEN et MKFA sont des carrés de sens direct.

1) Montrer que les points E, F et M sont alignés.
2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B.
   a) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre I.
   b) Déterminer $r_1 \circ r_2$ (E). En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l'on déterminera.
3) Soit S la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
   a) Déterminer S (M).
   b) Construire le point G image de F par S.
   c) Montrer que F est le milieu du segment $[KG]$.
   d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P. Construire P.

Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note A le point d'affixe – 2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

$\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ se coupent en un point d'abscisse β.

a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

   b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0{,}4 < x_1 < 0{,}5$ et $3{,}8 < x_2 < 3{,}9$.

   c) Placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(\beta, 0)$ et $B(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$.

   d) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Pour tout réel t de $]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, on désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ et la droite d'équation $x = t$.

   a) Montrer que pour tout réel $t \in]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, $\mathscr{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.

   b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

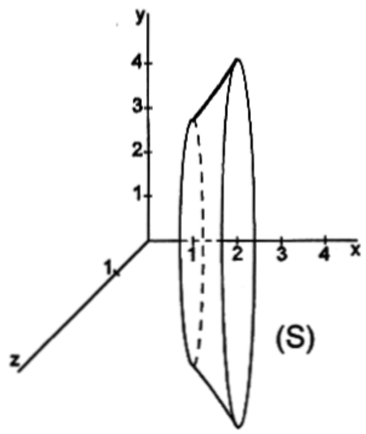
   c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0, \beta[$ tel que $\mathscr{A}(t_1) = \mathscr{A}(t_0)$.

   Hachurer $S(t_1)$.

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.



1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}}\,dt$.

   Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t\,dt$.

   a) Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2\,F'(x)$.

   b) En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2\,F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

   b) Calculer alors $\mathcal{V}$.

figure (1)

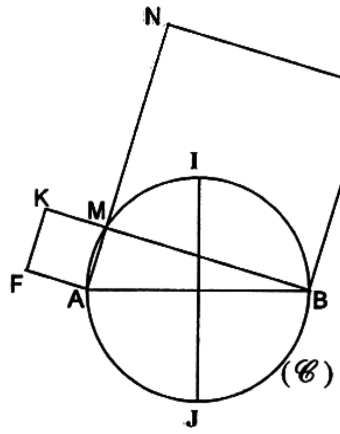


figure (2)