

SECTION : MATHÉMATIQUES

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 Heures

COEFFICIENT : 4

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le point A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.

L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe

a) $-\sqrt{3} + i$

b) $\sqrt{3} - i$

c) $-\sqrt{3} - i$

- 2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $-\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{3}$

- 3) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$,

alors $a_n \equiv 0 \pmod{5}$ pour

a) tout entier naturel n pair

b) tout entier naturel n

c) tout entier naturel n impair

- 4) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte quatre questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des quatre questions de ce QCM.

La probabilité pour que ses quatre réponses soient toutes exactes est

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3^4}$

c) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$.

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f .

x	0	1
f'(x)		-
f(x)	0	$-\infty$

Tracer (\mathcal{C}) . (On précisera la demi-tangente à (\mathcal{C}) en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]-\infty, 0]$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})).

b) Tracer (Γ) . (On précisera la demi-tangente à (Γ) en O).

3) a) Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$.

b) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = -\ln 2$; $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[JC]$.

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J , qui envoie A sur K .

a) Déterminer l'angle et le rapport de f .

b) Justifier que $f(K) = L$.

c) Soit H le milieu du segment $[AJ]$. Justifier que $f(I) = H$.

3) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

$$\text{tel que } z' = - \left(\frac{1+i}{2} \right) \bar{z} + \frac{1+i}{2}.$$

- Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C .
 - Donner les affixes des points I, K, J et H .
 - Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.
 - Déduire alors que $\varphi = f \circ s_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans 2° et $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).
- 4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ .
- Tracer Δ .
 - La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q .
Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère l'ellipse (\mathcal{E}) d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos \theta, 2 \sin \theta)$, où θ est un réel de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

- Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de (\mathcal{E}) .
 - Tracer (\mathcal{E}) et placer ses foyers.
 - Vérifier que le point M appartient à (\mathcal{E}) .
- Soit (T) la tangente à (\mathcal{E}) en M .
Montrer qu'une équation de (T) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est $2x \cos \theta + y \sin \theta - 2 = 0$.
- On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par \mathcal{A} l'aire du triangle OPQ .
 - Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.
 - En déduire que l'aire \mathcal{A} est minimale si et seulement si M est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 5 (3 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0, \text{ où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f.$$

a) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \cos x$.

Vérifier que g est un élément de E .

b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E .