LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8

M.TRABELSI M. TAARIT
M.JERIDI M. LAKHDAR

DEVOIR DE SNTHESE 2

EPREUVE : MATHEMATIQUES 4M

Durée : 4h

Date : 27 / 05 / 2021

EXERCICE 1 4 pts

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $ABCD$ un losange de centre O tels que

- $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,
- I, J, K et Ω sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[DC]$, $[BC]$ et $[AO]$
- (LJ) coupe (KB) en H.

1. Soit l'isométrie $g = r_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$. Déterminer $g(J)$ puis caractériser g.
2. Soit $f = r_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{KB}}$.
   (a) Trouver la droite Δ telle que $t_{\overrightarrow{KB}} = S_{(AB)} \circ S_{\Delta}$.
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
3. (a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui envoie B sur A et A sur D.
   (b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.
   (c) En déduire que $g \circ h = r_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}$.
4. On donne $AB = 2$ et on considère le repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \overrightarrow{OD}\right)$ avec $\vec{u} = \frac{1}{OC}\overrightarrow{OC}$.
   Soit φ l'application du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que
   $$z' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\bar{z} - \sqrt{3}$$
   (a) Vérifier que $z_I = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$.
   (b) Montrer que φ est un antidéplacement qui transforme I en J et O en A.
   (c) On note par $\Omega' = r_{(A,\frac{\pi}{3})}(\Omega)$. Montrer que $\varphi = g \circ h$. En déduire l'image de Ω par φ.
   (d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

EXERCICE 2 4 pts

Une urne contient des boules indiscernables au toucher

- n boules blanches portant le numéro 1 avec $n \geq 2$.
- 4 boules rouges portant les numéros 2, 2, 3 et 4.
- 2 boules vertes portant le numéro 1

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. (a) Calculer la probabilité de l'événement A : avoir deux boules de même couleur .
   (b) Déterminer n pour que $p(A) = \frac{17}{55}$.
   Dans la suite de l'exercice on suppose que $n = 5$.

2. On note par a et b les numéros affichés sur les deux boules tirées.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit $\cos\left(\frac{\pi}{a}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{b}\right)$.

   (a) Montrer que $p(X = 0) = \frac{27}{55}$.

   (b) Calculer que $p(X \geq 0)$. En déduire que $p(X > 0) = \frac{13}{55}$.

3. Une partie de jeu consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne, on note les numéros affichés sur les boules tirées puis elles sont remises dans l'urne .
Par partie, la mise est fixée à $10dt$.
On établit la règle de jeux suivante :
Le joueur reçoit $12dt$ si $(X < 0)$, il reçoit $15dt$ si $(X > 0)$ et il ne reçoit rien si $X = 0$.
Soit Y la variable qui prent pour valeur le gain algébrique du joueur.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

   (b) Montrer que $E(Y) = -\frac{175}{55}$. Interpréter le résultat.

   (c) un joueur se présente et dans sa poche 20 dinars, il envisage de jouer 6 parties. Est-ce possible ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 4 pts

Partie A

1. Déterminer un entier naturel non nul n tel que $10^n \equiv 1 \pmod 7$.
2. Soit p un nombre premier ne divise pas 10.
Soit k, le plus petit entier naturel non nul tel que $10^k \equiv 1 \pmod p$.

   (a) Montrer que $k \leq p - 1$.

   (b) Soit r le reste de la division euclidienne de $(p - 1)$ par k.
   Montrer que $10^r \equiv 1 \pmod p$.

   (c) En déduire que k divise $(p - 1)$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel non nul u tel que $10^u \equiv 1 \pmod{37}$.

Partie B

Soit p et q deux entiers naturels premiers tel que $p < q$ et $10^{p+q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

1. (a) Montrer que p et 10 sont premiers entre eux.

   (b) Déduire que $10^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ et que $10^q \equiv 1 \pmod p$.

2. (a) Montrer que $p - 1$ et q sont premiers entres eux.

   (b) Montrer que $p = 3$.

   (c) Déduire que $10^{q+2} \equiv 1 \pmod q$.

   (d) Déterminer q.

EXERCICE 4 **8 pts**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-1) + be^{-x}$ où a et b
Dans la feuille annexe, on a représenté la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction f' derivée de f ainsi que sa tangente $\Delta : y = -x$ au point O.

1. (a) Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 1 - x - e^{-x}$.
   (c) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f ;
   (d) Étudier les variations de f.
   (e) Construire soigneusement la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse (-2) puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le même repère.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère les fonctions f_n et h_n définies par :
   $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n - e^{-x}, x \in [0, n]$ et $h_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) + \dfrac{x}{n-1}, x \in [0, n[$
   (a) Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ admet dans $]0, n[$ une unique solution α_n.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0, n[$, $f_n'(x) = e^{-x}\left(1 - e^{(n-1)h_n(x)}\right)$.
   (c) Vérifier que $f_n(\alpha_n) = \dfrac{-\alpha_n e^{-\alpha_n}}{n}$ puis dresser le tableau de variation de f_n.
   (d) Montrer que pour tout réel $x, e^{x-1} \geq x$. En déduire que $f_n(\alpha_n) \geq \dfrac{-1}{ne}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n)$.
   (e) Soit $\mathscr{A}_n$ l'aire $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe de f_n, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = n$.
   Montrer que $\mathscr{A}_n = \dfrac{1}{n+1} - e^{-n}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathscr{A}_n$.

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^n t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^n t(1-t)^n\, dt$.
   (a) Montrer que $J_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1^k\right) C_n^k}{2+k} = J_n$
   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1^k\right) C_n^k}{2+k}\right)$

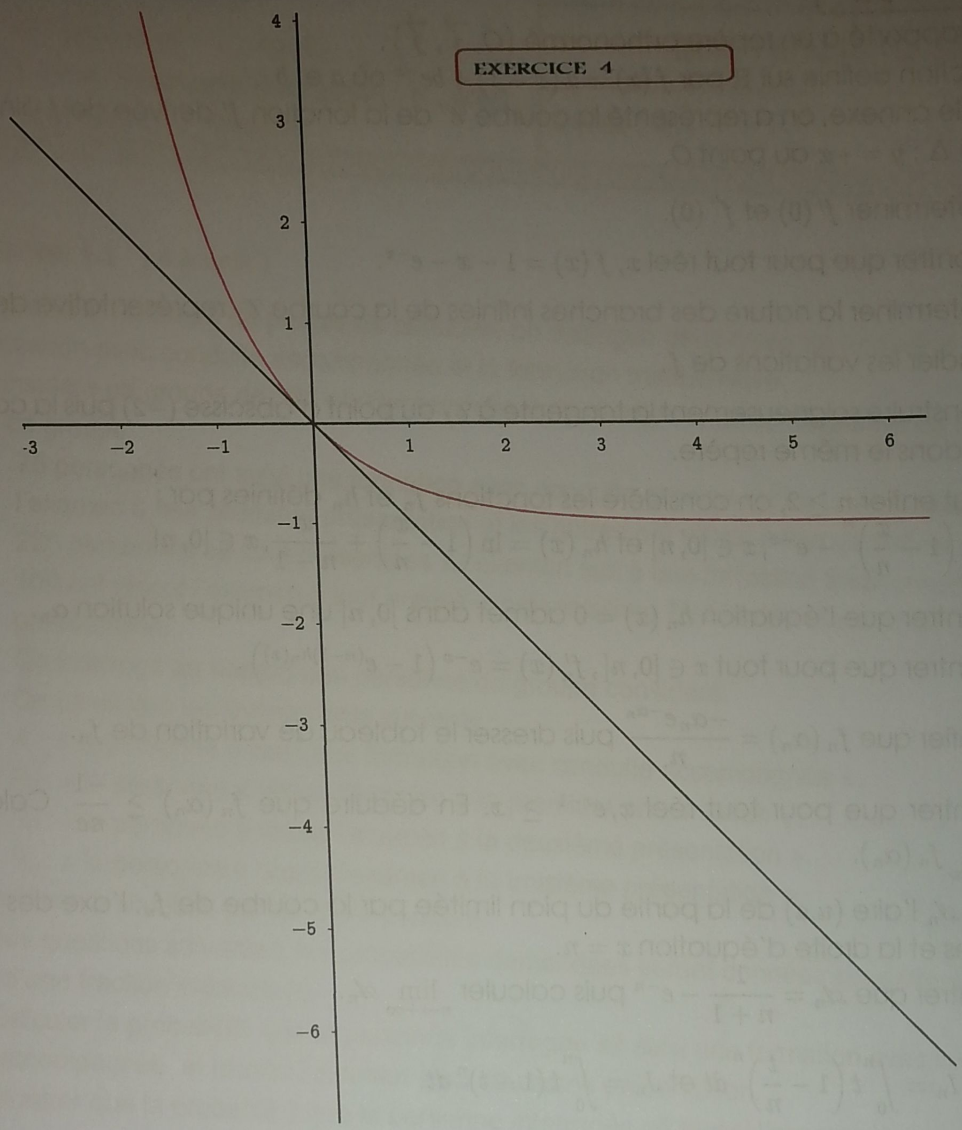
4. Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction continue sur $\varphi(I)$.
   Montrer que pour tout a et b de I, $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\, dt = \int_a^b \varphi'(t) \times g(\varphi(t))\, dt$.

5. En déduire que $I_n = n^2 J_n$. Trouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

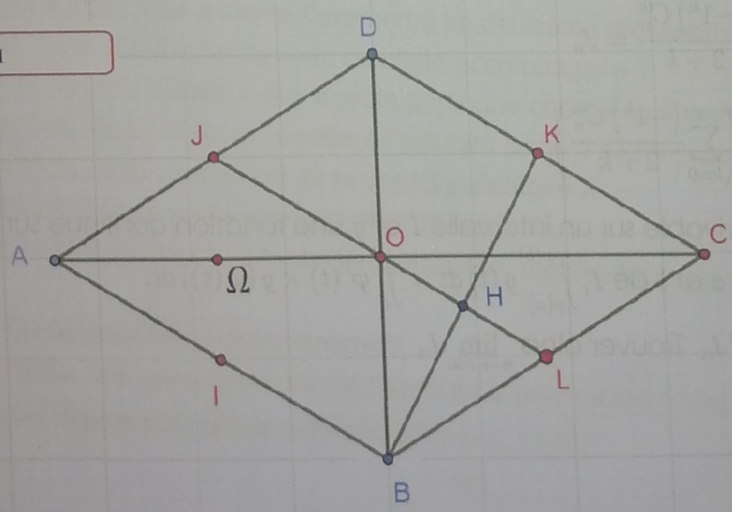
ANNEXE

Nom & PRENOM : ....

EXERCICE 4



EXERCICE 1



Lycée Pilote Bizerte : Mme Lamia Khemiri Lycée Pilote Monastir : F . Zemni M . Hassine – H . Yakoubi – M . Krir Lycée Hédi Khéfacha : M . Mansour – I . Aguir Lycée Rue Fattouma Bourguiba : K . Zrafi Lycée Khénis : J . Mbarki	*Devoir de synthèse n°2* *4 Maths* **MATHEMATIQUES** Durée : 4 h Le 27/05/2021

Exercice 1 : (4 points)

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :
La formation avec conduite accompagnée et la formation traditionnelle.
On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire.
Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suit à une formation traditionnelle ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à leur première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :
A : « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée ».
R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation ».
R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation ».
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1) Modéliser la situation par un arbre pondéré.
Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une forme d'une fraction irréductible.

2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussit l'examen à sa deuxième présentation.
b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.
c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

3) On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calculer l'espérance mathématique de cette variable.

4) On choisit, successivement de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Calculer la probabilité p_n de l'évènement
F : « au moins une personne à réussi l'examen à la troisième tentative ».
b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geq 0.99$.

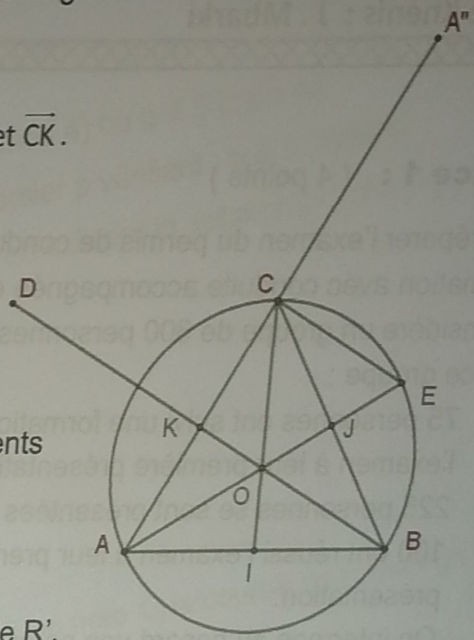
Exercice 2 : (5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC] et $D = S_{(AC)}(B)$.

On désigne par O le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

Soient $r_1 = R_{(A,\frac{\pi}{3})}$, $r_2 = R_{(B,\frac{\pi}{3})}$ et $r_3 = R_{(C,\frac{\pi}{3})}$.



t_1 et t_2 sont les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK}$.

I) 1) On pose $R = r_3 \circ t_1 \circ r_2$.

Déterminer R(B) puis caractériser R.

2) Soit E le point diamétralement opposé à A et $A'' = S_{(EC)}(A)$ et $g = S_{(EB)} \circ S_{(EC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

a) Montrer que les points B, E et A'' sont alignés.

b) Déterminer g(A), en déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) On pose $R' = r_1 \circ t_2$.

a) Déterminer R'(K).

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de R'.

4) Soit f l'isométrie du plan qui envoie A, B et C respectivement en C, A et D.

a) Vérifier que CAD est un triangle équilatéral indirect.

b) Montrer que f est un antidéplacement.

c) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(I,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{IB}$ (On prendra IB = 1).

On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = -e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} - e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

1) Soit M'' le symétrique de M par rapport à (CI). Déterminer l'affixe z'' de M'' à l'aide de l'affixe de M.

2) a) Déterminer l'écriture complexe de $S \circ S_{(CI)}$.

b) En déduire que $S \circ S_{(CI)} = r_1$.

3) Pour tout entier naturel n, on définit les points B_n par :

* $B_0 = B$
* Pour tout $n \in IN$, $B_{n+1} = r_1(B_n)$.

a) Vérifier que $\underbrace{(r_1 \circ r_1 \circ \ldots \circ r_1)}_{n \text{ fois}}(B) = B_n$

b) Montrer que si A est le milieu de $[BB_n]$ alors $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 6)$.

c) Déduire le plus petit entier n > 2021 tel que A soit le milieu de $[BB_n]$

Exercice 3 : (4 points)

Dans cet exercice, on se propose de déterminer s'ils existent les couples d'entiers naturels (x,y) qui vérifient l'équation (E) : $y^2 = x^3 - 5$.

Soit (x , y) une solution de (E).

1) a) Soit a un entier naturel, déterminer les restes modulo 4 de a^3.

b) En déduire que y est pair (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que y est impair) et que $x \equiv 1 \pmod 4$.

2) a) Montrer que $x^2 + x + 1 \equiv 3 \pmod 4$.

b) Vérifier que $y^2 + 4 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ (*).

c) Soit q un diviseur premier de $x^2 + x + 1$, montrer que $q \equiv 1 \pmod 4$ ou $q \equiv 3 \pmod 4$.

d) En déduire que $x^2 + x + 1$ possède au moins un diviseur premier p vérifiant : $p \equiv 3 \pmod 4$.

3) En remarquant qu'il existe un entier naturel n tel que y = 2n et en utilisant la relation (∗) montrer que $n^2 \equiv -1 \pmod p$.

4) a) Justifier que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

b) Montrer que $n^{p-1} \equiv -1 \pmod p$.

c) En déduire que (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4 : (7 points)

I) Soit la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par $f(x) = e^{-x} - \ln(1-x) - 2$ on note C_f la courbe de f selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de u .

b) Calculer u(0) puis déduire le signe de u(x) sur $\mathbb{R}$

2) a) Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = (1-x)\left[\left(\dfrac{e^{-x}}{-x}\right)(1 - \dfrac{1}{1-x}) - \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}\right] - 2$

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter ce résultat graphiquement

b) Vérifier que pour tout $x < 1$, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}u(x)}{1-x}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) On a tracé dans l'annexe ci jointe les courbes C_h et C_g des fonctions h et g définies par

$h(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \ln(1-x) + 2$

C_h et C_g se coupent en deux points d'abscisses respectives α et β avec $\alpha < \beta$

a) Justifier que α et β sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-\infty,1[$

b) Placer les points de C_f d'abscisses α et β

c) Tracer C_f dans l'annexe .

II) Soit la fonction F définie sur $]-\infty,1]$ par $\begin{cases} F(x)=\int_0^x f(t)dt & \text{si } x<1 \\ F(1)=-\frac{1}{e} \end{cases}$

On note (Γ) la courbe de F dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a :

$$\int_0^x \ln(1-t)dt=(x-1)\ln(1-x)-x$$

puis déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a $F(x)=(1-x)(1+\ln(1-x))-e^{-x}$

b) Montrer que F est continue à gauche en 1 .

c) Etudier la dérivabilité de F à gauche en 1 puis interpréter ce résultat graphiquement

d) Dresser le tableau de variation de F .

2) a) Montrer que le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion de (Γ).

b) On a placé aussi dans l'annexe sur l'axe des ordonnées les points d'ordonnées $F(\alpha)$ et $F(\beta)$.

Tracer (Γ) dans l'annexe

c) On note A l'aire (en unité d'aire) de la partie hachurée du plan .

Montrer que $A=\beta e^{-\beta}-\alpha e^{-\alpha}+\alpha-\beta$.

III) On considère les suites réelles définies sur $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ par $W_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-\frac{k}{n}}$; $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})$ et $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-\frac{k}{n})$

1) a) Vérifier que pour tout entier $n\geq 2$, $S_n=W_n-U_n-2+\frac{2}{n}$

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, $W_n=\dfrac{e^{-1}-e^{-\frac{1}{n}}}{n(e^{-\frac{1}{n}}-1)}$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n=1-\frac{1}{e}$

2) a) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout $k\in\{0,1,2,\dots,n-2\}$

on a : $\frac{1}{n}\ln(1-\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln(1-t)dt \leq \frac{1}{n}\ln(1-\frac{k}{n})$

b) En déduire que pour tout entier $n\geq 2$; $\frac{1}{n}-1\leq U_n\leq\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n})$

c) Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\frac{1}{e}$

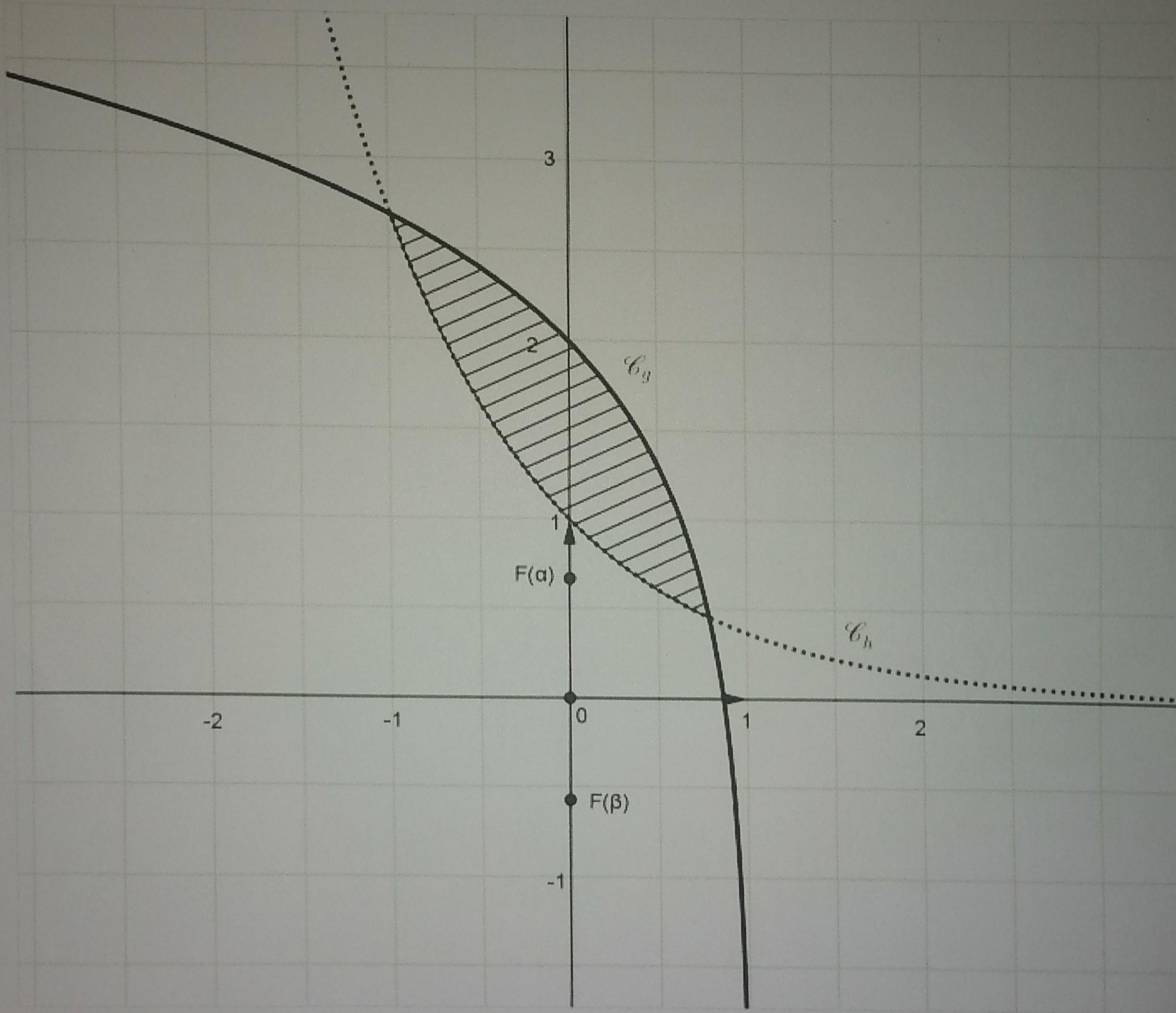
3) Pour tout entier $n\geq 2$ on pose $V_n=\sqrt[n]{\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}}$.

Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ on a $U_n=\ln(V_n)$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Feuille annexe à remettre

Nom et prénom : ....

Exercice 4 :



Lycée pilote Bourguiba de Tunis	**Sujet de revision 4**
Mr:Barhoumi	4ème Maths 2021

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit m un nombre complexe non nul tel que : $|m|=r$ et $\arg(m)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

On désigne par M et A les points d'affixes respectives m et 1.

1) Déterminer r pour que $AM=1$.

2) Soit l'équation $(E_m): mz^2-(1+i)z+\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}=0$. On désigne par M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 les solution de l'équation (E_m).

a)Sans résoudre (E_m) montrer que $Arg(z_1+z_2)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

b)Montrer que : $m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right)=i$.

c)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

d)Ecrire sous forme exponentielle les solutions de (E_m).

3)Dans suite de l'exercice M étant un point du cercle trigonométrique.

a)Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que $\frac{i-z}{i+z}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $m\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\overline{m}}\right)\left(\frac{i+z}{i-z}\right)^2=1+i$.

Exercice 2:

Soit AIB un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et C le symétrique de A par rapport à (BI).

1) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que $f(A)=B$ et $f(B)=C$.

b) Identifier f.

2) Soit (Γ) le cercle de centre B et passant par I. Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que si M décrit (Γ) le point M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera et qu'on construira.

b) Soit Ω le point d'intersection de (Γ) et (Γ'). Montrer que si $M\in(\Gamma)\setminus\{I\}$, alors Ω, M et M' sont alignés.

3) Soit g l'antidéplacement définie par g(A)=B et g(B)=C.

a) Montrer que g est une symétrie glissante qu'on caractérisera.

b) Vérifier que $g=S_{(BC)}\circ R$ et déduire l'ensemble des points N du plan tels que g(N)=R(N).

Exercice 3 :

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. On lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que : $p(A)=\frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $D=[-2,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+2}\,e^{-\frac{x}{2}}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A /1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en –2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et que $f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2)Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}_+$, on a : $2e^{\frac{t}{2}}\geq t+2$. En déduire que $\forall t\in\mathbb{R}_+$ on a : $0\prec f(t)\leq\sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}}$.

B/ Soit F la fonction définie sur $I=\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right[$ par : $F(x)=\int_0^{\ln x}f(t)\,dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur I et que : $F'(x)=\sqrt{\frac{2+\ln x}{x^3}}$.

2) A l'aide de A/ 3), montrer que, $\forall x\in[1,+\infty[$, $0\leq F(x)\leq 4\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

3) En déduire que F admet une limite λ en $+\infty$ et que $\lambda\leq 4\sqrt{2}$.

Exercice 5 :

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$ si x > 0 et $F(0)=-\ln 2$.

1°)a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x > 0,

$$F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\ .$$

b) Montrer que pour tout réel x > 0, $e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$.

c) Calculer $\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$. En déduire que F est continue à droite en 0.

2°)a) Montrer que pour tout réel x > 0, $F(x)\leq\frac{-e^x+1}{2x}$.

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

3°) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel x > 0, $F'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$.

4°) Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un réel c de $]0,x[$ tel que $F(x)-F(0)=xF'(c)$.

b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.