

Série Integrales

Exercice 1:

- 1) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$.
 - a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[-1; 1]$.
 - b) Montrer que g est dérivable sur $] -1; 1[$ et que pour tout $x \in] -1; 1[$ on a : $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g'\left(\frac{k}{n}\right)$.
 - b) Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$. Montrer que : $\frac{1}{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g'(x) dx \leq \frac{1}{n} g'\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
 - c) En déduire que pour $n \geq 2$, $S_n - \frac{1}{n} g'\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} g'(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n}$.
 - d) Calculer la limite de la suite (S_n) .

Exercice 2:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1}(x)}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{2n+1}(x)} dx$.

- 1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = J_n$. En déduire la monotonie de la suite (I_n) .
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)J_n$.
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2nI_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1}$.
- 4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2n}}$.
- 5) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$. En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 3:

On rappelle que : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

- 1) Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = 2\cos x - x\sin x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- 2) Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x^2 \cos x$.
 - a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$.
 - b) Calculer l'aire, en unité d'aires, de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$ et $B_n = \int_0^1 t^n \sin t dt$.
 - a) Montrer que $A_n > 0$ et que (A_n) est décroissante.



- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (A_n) .
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = -(n+1)B_n + \sin(1)$ et $B_{n+1} = (n+1)A_n - \cos(1)$.
- d) Déterminer les limites des suites (B_n) , (nA_n) et (nB_n) .
- 4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{(n,p)} = \int_0^\pi (\cos x)^n \cos(px) dx$.
- a) Calculer $I_{(1;1)}$.
- b) Montrer par récurrence sur n , que pour tout $p > n$ on a : $I_{(n;p)} = 0$.
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{(n;n)} = \frac{\pi}{2^n}$.

Exercice 4 :

- 1) Soit f la fonction définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt$.
- a) Montrer que f est dérivable sur $]-1; 1[$ et préciser sa fonction dérivée.
- b) Montrer que f est impaire.
- c) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
- d) Soit $\alpha = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Vérifier que $\alpha > 1$.
- 2) Pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $g(x) = f(\sin x)$.
- a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et que $g'(x) = \frac{2}{\cos x}$.
- b) Vérifier que $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt = \frac{\alpha}{2}$.
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1; 1[$, on pose $F_n(x) = \int_0^x \frac{2}{(1-t^2)^n} dt$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1; 1[$, on a :
- $$F_{n+1}(x) = \left(\frac{2n-1}{2n}\right) F_n(x) + \frac{x}{n(1-x^2)^n}.$$
- b) En déduire $F_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F_3\left(\frac{1}{2}\right)$ en fonction de α .
- 4) On définit la suite (I_n) par : $I_0 = \frac{\alpha}{2}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} dt$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\alpha}{4^n}$.
- b) En déduire la limite de (I_n) .
- 5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose : $H_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \dots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}$.
- a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $H'_n(t) = \frac{1 - \sin^{2n} t}{\cos t}$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\alpha}{2} - I_n$.



c) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}}$.

Calculer la limite de (u_n) .

Exercice 5 :

Dans la figure ci-contre, le solide (S) est obtenu en faisant tourner la courbe de la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$ autour de l'axe des abscisses. On note $\mathcal{V}$ le volume de (S) en unités de volumes.

1) Pour $x \in]-\pi; \pi[$ on pose $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}$ et

$$G(x) = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{3+t^2} dt.$$

a) Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer que G est dérivable sur $]-\pi; \pi[$ et calculer $G'(x)$.

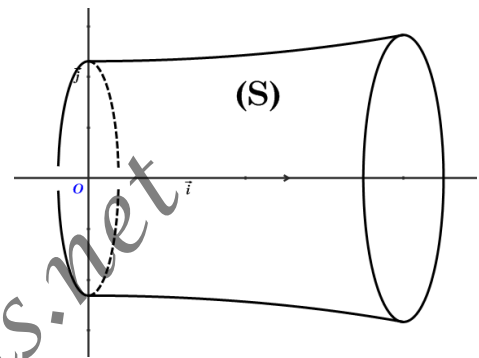
c) En déduire que pour tout $x \in]-\pi; \pi[$, $G(x) = F(x)$.

2) Soit $H(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $H(\tan x) = x$.

b) Montrer que pour tout $x \in]-\pi; \pi[$, $G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

c) Calculer $\mathcal{V}$.



Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \int_0^{\sqrt{\tan x}} \frac{t}{1+t^4} dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $f'(x)$.

2) Montrer que pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\tan x}{2x(1+\tan^2 x)} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\tan x}{2x}$. En déduire que f est dérivable à droite en 0.

3) Expliciter $f(x)$. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel t , $\frac{t}{1+t^4} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{4k+1} + (-1)^{n+1} \frac{t^{4n+5}}{1+t^4}$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4k+2}$ et $v_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4} dt$.

a) Montrer que $|v_n| \leq \frac{1}{4n+6}$.

b) En déduire la limite de u .

