L.P.A
Ben Mbarek Badreddine

Devoir non surveillé

4ème Maths
2020/2021

Exercice 1 : 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i|z|}.z$

1) *Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives par f du point A d'affixe* π *et du point B d'affixe* 2π
2) *Montrer qu'un point M est invariant par f si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que .* $OM = 2k\pi$.

   En déduire l'ensemble E des points invariants par f.
3) *Soit* $C\left(1+i\sqrt{3}\right)$ *et* Δ *la demi-droite d'origine O passant par C et privée de O.*

   M un point de Δ *d'affixe z et d'image M' par f.*

   Déterminer $|z|$ *pour que M et M' soient symétriques par rapport à l'axe* $(O,\vec{u})$
4) *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$ *, on note* ζ_k *le cercle de centre O et de rayon* $2k\pi$ *,* D_k *la partie du plan délimitée par* ζ_k *et* ζ_{k+1} *et* a_k *l'aire du* D_k .

   a) Calculer a_k

   b) Déterminer la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

   c) Calculer la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
5) *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$

   a) Déterminer les points de $\Delta \cap D_k$ *qui sont symétriques avec leur image par rapport à l'axe* $(O,\vec{u})$

   b) Montrer que tout point de D_k *a son image par f dans* D_k .

Exercice 2 : 3.5 points

Les trois questions sont indépendantes.

1) *Montrer que pour toute probabilité et pour deux événements* E_1 *et* E_2 *tels que* $p(E_1) = p(E_2) = 1$ *alors* $p(E_1 \cap E_2) = 1$.
2) *Une variable aléatoire X prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives* e^a , e^b *et* e^c *où a, b et c sont en progression arithmétique.*

   Calculer a, b, c et $V(X)$ *sachant que* $E(X) = 1$.
3) *Soient A et B deux points distincts. f et g deux déplacements d'angles* α *et telles que* $f(A) = g(A) = B$.

   Montrer que $f = g$

Exercice 3 : *4,5 points*

Les questions sont indépendantes.

1) *Soit* $(E): 2^m - 3^n = 1$, $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ *, déterminer les restes de la division euclidienne de* $3^{2k} + 1$ *par 8, puis* $3^{2k+1} + 1$ *par 8.*

   b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *un couple de solution, montrer que* $m \leq 2$.

   c) Résoudre alors (E)

2) *Soit* $(F): 2(n-1)^2 = 7m + 2$, $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   a) Montrer que (n,m) *solution de F alors* $n \equiv 0[7]$ *ou* $n \equiv 2[7]$

   b) Résoudre F.

   c) Déterminer les solutions de F tel que $n \wedge m = 9$

3) *On multiplie 2021 par un entier naturel non nul inférieur à 35, on obtient un nombre dont la somme des chiffres égal à 3n. Quel est ce nombre ? Justifier votre réponse.*

Exercice 4 : *7 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) *Soit g la fonction définie sur* $[0, +\infty[$ *par* $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

   a) Dresser le tableau de variation de g.

   b) Démontrer qu'il existe un réel unique α *strictement positif tel que* $g(\alpha) = 0$ *et que* $\alpha \in \left]\frac{Ln2}{2}, 1\right[$.

   c) Déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$

2) *Soit f la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = x.\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$ *et on note* (ζ) *sa courbe représentative.*

   a) Justifier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$ *et montrer que* $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} . g\left(\frac{1}{x}\right)$.

   b) Déduire les variations de f.

   c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

3) *a) Soit* $t \in [0,1]$ *, calculer* $\int_0^t (e^x - e)\,dx$

   En déduire que $0 \leq e^t - 1 \leq e \times t$ *; puis que* $1 + t \leq e^t \leq 1 + t + \frac{e}{2} t^2$

   b) Montrer que $\forall x \geq 2$ *on a* $0 \leq (f(x))^2 - 2x \leq 2e$

4) *Soient h la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $h(x)=\sqrt{2x}$ *et* Γ *sa courbe représentative.*

   a) Soient $M(x,h(x))$ *et* $N(x,f(x))$ *, montrer que* $MN=|f(x)-h(x)|$

   b) Déterminer le signe de $f(x)-h(x)$ *et calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-h(x)$.

   Interpréter graphiquement ces résultats.

   c) Tracer Γ *et* ζ

5) *Soit F l'application qui à tout point M d'affixe non nulle z et* $|z|\neq 1$ *associe M' d'affixe Z telle que* $Z=\dfrac{\bar{z}}{Ln|z|}$ *et on désigne par* Δ *la droite d'équation* $x=1$

   a) Déterminer une équation de l'ensemble E des points $M'=F(M)$ *lorsque M décrit* Δ *privée du point* $A(1,0)$

   b) Prouver que E est la réunion de (ζ) *et d'une courbe* (ζ') *obtenue à partir de* ζ .