DIVISIBILITE DANS Z
CONGRUENCE

L'arithmétique, c'est être capable de compter jusqu'à vingt sans enlever ses chaussures .Walt Disney

Exercice1 : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse. Dans ce qui suit a, b et c trois entiers.

1)Si $a^2 \equiv b^2$ (mod 8) alors $a \equiv b$ (mod 8)

2) Si $2a \equiv 2b$ (mod 8) alors $a \equiv b$ (mod 8)

3) Si a divise b et a divise c alors a² divise bc

4)Le reste de la division euclidienne de 2^{2010} par 11 est égal à 1

5)si un entier x est telle que :
$x^2+x \equiv 0$ [mod 6] alors $x \equiv 0$ [mod 3]

6)Pour tout n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$
alors $a \equiv 0 (mod 5)$ pour tout n impair

7)Si $2a \equiv 2b$ (mod 7) alors $a \equiv b$ (mod 7)

8)Pour tout entier naturel n:
a) $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5
b) $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$est divisible par 7.

9) n étant un entier impair et a et b deux entiers.
Si n divise a + b et n divise a - b alors n divise a et n divise b.

10) : « Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2 ».

• Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

11) On considère l'entier $N = 11^{2\,011}$.
L'entier N est congru à 4 modulo 7.

12)
a) $x^3 \equiv x$ (mod 2).
b) Si $x \equiv 2$ (mod 14) alors $x \equiv 1$ (mod 7).
c) Si $4x \equiv 10y$ (mod 5) alors $x \equiv 0$ (mod 5).

13) Le quotient dans la division euclidienne de –2011 par 87 est - 23

14) $\sum_{k=1}^{2014} k! = 3$ [10]

15) Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :
a = 3n+1 et b = 2n+3. Le pgcd de a et b est égal à 7 si et seulement si $n \equiv 2$ [7]

16) Sachant que 2011 est premier. On a : $2013^{2011} \equiv 1$ [2011]

17) Soit x un entier.
Si $x^2 \equiv 1$ [9] alors $x \equiv 1$ [3]

Exercice 2:

Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 10 de 7^n
En déduire le chiffre des unités du nombre 43578707^{327}

Exercice 3:

1) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 5 de 3^n.

2)On pose $A_n=3^n+3^{2n}+3^{3n}$
Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division de A_n modulo 5

Exercice 4:

1)a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 3 de 2^n.
b)Déterminer le reste modulo 3 de $(40502)^{2009}$
2)a)Mque pour tout n de IN, $5^{2n} \equiv 1$ (mod3)
b)Déterminer l'ensemble des entiers naturels tels que $2^n - 5^{2n} \equiv 0$(mod3)
3)Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que :$(40502)^n-(40525)^n \equiv 3$(mod3)

Exercice 5 :

Soit $n \in IN$
1)Démontrer que le chiffre de unités de n est donné par le reste de la division euclidienne de n par 10
2)a)Montrer que $3^n \equiv 1$(mod10) ssi $n \equiv 0$ (mod4)
b)Quel est le chiffre des unités de $N_1=3^{1029}$
c)Quel est le chiffre des unités de
$N_2=373^{2531}x2353^{190}$
3)a)Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 10 de 7^n.
b)En déduire le chiffre des unités du nombre 43578707^{4327}
4)Soit $n \geq 2$
a)Démontrer par récurrence que le reste de la division euclidienne de 6^n par 10 est 6
b) Quel est le chiffre des unités de 9^n
c)En déduire le chiffre des unités de $N_3=426^{1259}x859^{12235}$
5)Quel est le chiffre des unités de $6^n x 9^n$

Exercice 6:

Soit p un nombre premier.
1)Montre que pour tout $k \in \{1,2,...,p-1\}$
on a $C_p^k \equiv 0$ (mod p)
2)Montrer alors que pour tout entier naturel a
on a : $a^p \equiv a$ (mod p)
3)Démontrer que pour tout entier n, n^5-n est divisible par 10
4)a)Soit a et b deux entiers naturels Traduire en terme de congruence la propriété : a et b ont le même chiffre des unités
b)Soit $n \in IN$ et $p \in IN^*$
Démontrer que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités

Exercice 7:

Soit a et b deux entiers non nuls et n un entier naturel impair.
1)a)Démontrer que a+b divise a^n+b^n

L'arithmétique, c'est être capable de compter jusqu'à vingt sans enlever ses chaussures . **Walt Disney**

b)En déduire que 15 divise $2^{45}+5^{45}+10^{45}+13^{45}$

2)Prouver, sans effectuer de division, que 14 divise 1064

Exercice 8

Montrer que pour n entier naturel, $(n+1)^n-1$ est divisible par n^2 .

Exercice 9:

1) Démontrez que, pour tout entier naturel n: $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
Déduisez-en que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2)Déterminez les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier:
$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p par 7?

b) Démontrez que si p = 3n + 1 , alors A_p est divisible par 7.

c) Etudiez le cas où p = 3n + 2.

4) On considère les nombres a et b écrits dans le système binaire:
a = 1001001000 et b = 1000100010000.
Vérifiez que ces deux nombres sont des entiers de la forme A_p.
Sont-ils divisibles par 7?

Exercice 10 :

Soit a et n deux entiers naturels non nuls.

1)Démontrer que si a divise 2n+5 et a divise 3n-4 alors a divise 23

2)Démontrer que si a divise 15n+2 et a divise 10n+7 alors a divise 17

Exercice 11 :

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $3^{n+4} - 5^{2n+7}$ est divisible par 2

Exercice 12:

Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel *n*, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
Quel est l'ensemble des entiers naturels *n* tels que le nombre $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8?

Exercice 13:

Montrez que pour tout entier naturel *n*, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 14

Montrez que pour tout couple d'entiers relatifs (*a* , *b*), si *a* et *b* ne sont pas divisibles par 7 alors $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.
Montrez que pour tout *n* entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

Exercice 15

Déterminez l'ensemble des *x* entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 16:

Déterminer les entiers x vérifiant les conditions imposées.

$x \equiv 3 \pmod 5$ et $0 < x < 29$

$14 \equiv x \pmod 4$ et $0 < x < 4$

$23 \equiv 9 \pmod x$ et $10 < x < 28$

Exercice 17 :

Soit x et y deux entiers naturels tels que
$x \equiv 2 \pmod 5$ et $y \equiv 3 \pmod 5$
Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des nombres suivants.
a) $x^2 + 3y$, b) $2x^3 - y^2$

Exercice 18 :

Démontrer que $2^{770} - 5^{2477} \equiv 1 \pmod 7$

Exercice 19 :

x et y désignent des entiers.

a)Dque $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ ou $x^2 \equiv 4 \pmod 8$

b)en déduire les restes possibles de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 8

Exercice 20:

Déterminer tous les entiers n tels que
$n^2 \equiv 4 - 2n \pmod 5$

Exercice 21:

a)Déterminer l'ensemble E des entiers x tels que $x + 3 \equiv 3 \pmod 8$

b)Déterminer l'ensemble F des entiers x tels que $3x \equiv 5 \pmod 8$

c)Déterminer l'ensemble G des entiers x tels que $x^2+5x-2 \equiv 0 \pmod 6$

c)Déterminer l'ensemble H des entiers x tels que $x^2 \equiv 4 - 2x \pmod 5$

Exercice 22 :

On considère le système de congruences
$\begin{cases} n \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ n \equiv 1 \ (mod 5) \end{cases}$; où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors n − 11 est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme 11 + 15 k, où k désigne un entier relatif.

Exercice 23 :

1)On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

a)Pour tout élément *a* de A_7 écrire dans le tableau l'unique élément *y* de A_7 tel que $a\,y \equiv 1 \pmod 7$.

b)Pour *x* entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod 7$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod 7$.

c) Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod 7$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; ... ; p - 1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.
Soit a un élément de A_p.

a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.

b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation : $a x \equiv 1 \pmod p$.

c) Soient x et y deux entiers relatifs.
Démontrer que $x y \equiv 0 \pmod p$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d) Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$.
À l'aide des résultats précédents, résoudre dans Z l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

Exercice 24

Les quatre questions sont indépendantes.

1° Résoudre dans Z, l'équation $x^2 + x \equiv 5\ [7]$

2° a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $7^{2n} \equiv 1\ [8]$

b) En déduire le reste modulo 8 de 2009^{2010}

3° Déterminer les entiers naturel n tels que $27 \equiv 5\ [n]$

4° Soit n un entier naturel non nul, $x = 2^n + 1$ et $y = 2^{n+1} - 3$
Soit d un entier naturel qui divise x et y.

a) Montrer que d = 1 ou d = 5

b) Donner, suivant les valeurs de n, le reste modulo 5 de 2^n.

Exercice 25:

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes possibles modulo 7 de 2^n.

2) Montrer que pour tout n є IN, $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod 7$.

3) Quel est le reste modulo 7 de 1773^{704}

4) Montrer que pour tout n є IN, on a $3 \cdot 11^{n+1} + 5^{2n+4} \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 26:(4 points)

On considère dans IN l'équation (E) : $x^{35} \equiv 2\ [97]$.

1) Soit x une solution de (E).

a) Vérifier que 97 est premier.

b) Montrer que x et 97 sont premiers entre eux.

c) Justifier que $x^{96} \equiv 1\ [97]$.

d) En déduire que $x \equiv 2^{11}\ [97]$.

2) Soit un entier x tel que $x \equiv 2^{11}\ [97]$. Montrer que x est solution de (E).

3) Déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 27:

Soit x un entier vérifiant $\begin{cases} n \equiv 3 \pmod 8 \\ n \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$;

a) Montrer que $3x \equiv 1 \pmod{40}$

b) En déduire qu'il existe un entier k tel que x=40k-13

c) Déterminer, lorsque x > 0, le chiffre des unités de x