Exercice

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4xe^{-x}+2x^2-4x$

$(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=4(1-x)(e^{-x}-1)$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

2) Dans **l'annexe** jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction f', dérivée de f ainsi que la tangente T à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse x_0

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f'.

b) En déduire que la point $I(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha\in[1,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$ puis vérifier que $\alpha\in\left]\dfrac{3}{2},2\right[$

d) Vérifier que $e^{-\alpha}=1-\dfrac{\alpha}{2}$

e) Tracer (sur **l'annexe** jointe) la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (On prendra $\alpha\approx1{,}6$ et $f(1)\approx-0.5$)

3) a) Vérifier que $\forall x\in]-\infty,\alpha]$; $f(x)\le0$

b) A l'aide d'une integrartion par partie, montrer que $\int_0^{\alpha} x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x=1-e^{-\alpha}(\alpha+1)$

c) Montrer que $\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\alpha(\alpha^2-3)$. En déduire que $\dfrac{3}{2}<\alpha<\sqrt{3}$.

d) Calculer en fonction de α , l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

B) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}U_0<\alpha\\ U_{n+1}=f(U_n)+U_n\end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n<\alpha$.

b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

2) <u>On suppose que</u> $0\le U_0$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-x}+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$

et on donne ci-contre son tableau de variation

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\ln(4)-1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Justifier que $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)>0$.

b) Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+x=4x\,g(x)$

c) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\le U_n$.

d) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) <u>On suppose que</u> $U_0<0$