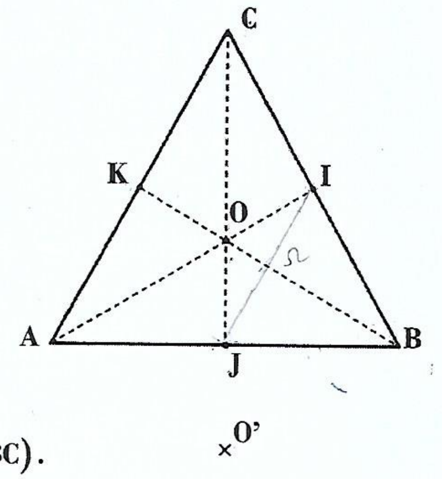
Lycée pilote de Bizerte	Test de controle n°5	Prof:M.Benali

EXERCICE 1

Dans la figure ci-contre :



- ABC est un triangle équilatéral de centre O, tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.
- $O'=S_{(AB)}(O)$.

1) Montrer que BOAO' est un losange de centre J et que $(BO')\perp(BC)$.

2) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement φ vérifiant $\varphi(B)=C$ et $\varphi(O')=O$.

   b) Préciser l'angle de φ. En déduire que φ est une rotation dont on précisera le centre.

3) Soit $g=t_{\overrightarrow{CB}}\circ\varphi$.

   a) Vérifier que $\varphi=S_{(AI)}\circ S_{(AB)}$.

   b) En déduire que g est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

4) Soit ψ l'antidéplacement tel que $\psi(B)=C$ et $\psi(O')=O$

   a) Monter que ψ est une symétrie glissante d'axe (IJ).

   b) Déterminer $S_{(IJ)}(B)$. En déduire le vecteur de $\vec{u}$ de ψ.

5) Soit Ω l'intersection de (BK) et (IJ). On pose $h=S_{\Omega}\circ\psi$

   a) Déterminer $h(J)$. En déduire que h est une symétrie orthogonale.

   b) Vérifier que $S_{\Omega}=S_{(BK)}\circ S_{(IJ)}$. En déduire que : $h=S_{(BK)}\circ t_{\overrightarrow{JI}}$

   c) Déterminer l'axe de h.

EXERCICE 2

Dans la figure ci-jointe :

- C est la courbe d'une fonction f, continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$ dans un repère orthonormé.
- La demi tangente à C au point $A\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ passe par le point $B\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
- La droite $\Delta : x=\frac{\pi}{4}$ est une asymptote verticale à C.

1) Par lecture graphique :

   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{f(x)}{x+\frac{\pi}{2}}$.

   b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note

d) Tracer C’ dans le même repère.

e) Dresser le tableau des variations de g.

2) Dans la suite de l’exercice, on admet que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a : $f(x) = \frac{1}{1-\tan x}$.

a) Montrer que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a : $f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

3) Soient h et k les fonctions définies sur $]4, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $k = g \circ h$.

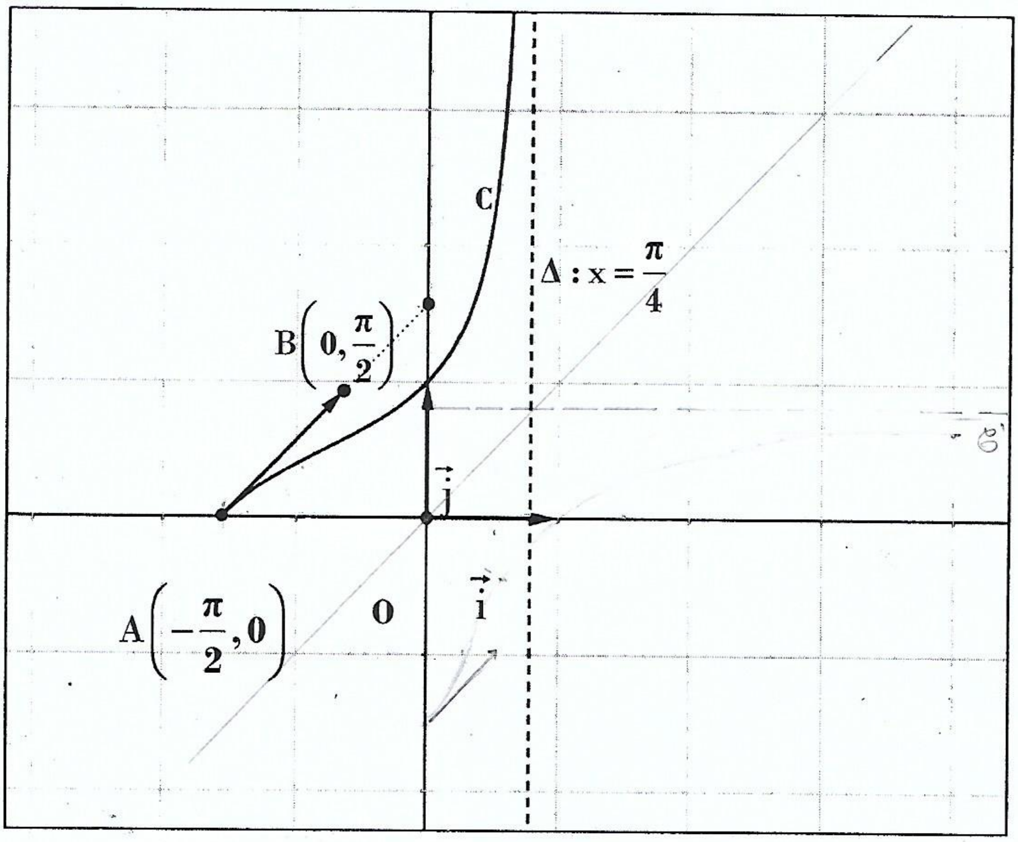
a) Vérifier que si $x \in]4, +\infty[$ alors $0 < h(x) < \frac{1}{2}$.

b) Montrer que k est dérivable sur $]4, +\infty[$ et que pour tout $x \in]4, +\infty[$ on a :

$$k'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}\left[2(h(x))^2 - 2h(x) + 1\right]}$$

c) Calculer que $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que k réalise une bijection de $]4, +\infty[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$.

d) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$, on a : $k^{-1}(x) = 4\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^2$.



Série Test de contrôle n°5

Ex 1

1) On a $O' = S_J(O)$

donc $J = O * O' = A * B$.

donc $BOAO'$ ~~équilatéral~~ parallélogramme

or O centre de ABC équilatéral.

donc $(CO) = \text{med}[AB]$.

d'où $OA = OB$.

d'où $OAO'B$ losange.

et on a $(\widehat{\overrightarrow{BO'}, \overrightarrow{BC}}) \equiv 3.(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}}) \equiv 3\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) a) On a O centre de ABC équilatéral.

donc O centre du cercle circonscrit de ABC.

donc $OA = OB = OC$

or $OAO'B$ losange donc $O'B = OB$

donc $OC = O'B$. et $OC \neq 0$ } Il existe un unique déplacement φ tel que :

$\varphi(B) = C$ et $\varphi(O') = O$.

b) φ est un déplacement d'angle :

$\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{OC}}) [2\pi]$.

or $(CO) = \text{med}(AB)$.

donc $(CO) \perp (AB)$ et $(OO') \perp (AB)$ } $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{OO'}$ colinéaires.

donc $\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{OC}}) [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'O}}) [2\pi]$

$\equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'A}}) [2\pi]$

$\equiv \frac{1}{2}.(\pi - (\widehat{\overrightarrow{BO'}, \overrightarrow{BO}}))[2\pi]$

$\equiv \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\alpha \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Comme $\alpha \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors φ est une Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, de centre Ω.

On a $\{\Omega\} = \{\text{med}[OO'] \cap \text{med}[BC]\}$

donc $\Omega = A$.

3) a) On a $S_{(AI)} \circ S_{(AB)} = R_{(A, 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}))}$

$= R_{(A, (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}))}$

$= R_{(A, \frac{\pi}{3})}$

$= \varphi$.

b) g est la composée de deux déplacements d'angles respectifs 0 et $\frac{\pi}{3}$. $(0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k$

Donc g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a $g(B) = t_{\overrightarrow{CB}} \circ \varphi(B)$

$= t_{\overrightarrow{CB}}(C)$

$= B$.

g fixe B donc B est son centre.

$g = R_{(B, \frac{\pi}{3})}$.

4) ψ l'antidéplacement tel que : $\psi(B) = C$ et $\psi(O') = O$

Comme $\text{med}[BC] \neq \text{med}[OO']$.

alors ψ n'est pas une symétrie axiale

$\Rightarrow \psi$ est une Symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.

On a : $\psi(B) = C \Rightarrow I = B * C \in$

$\psi(O') = O \Rightarrow J = O' * O \in \Delta$

donc $\Delta = (IJ)$.

b) On a $K = A * C$, $I = B * C$ $\Big\}$ $(KI) \parallel (BA)$, $KI = \frac{1}{2} BA = BJ$.

donc $BIKJ$ parallélogramme.

or $BI = IK = BJ = JK$.

donc c'est un losange.

donc $(IJ) = \text{med}[BK] \Rightarrow K = S_{(IJ)}(B)$.

donc $\varphi(B) = t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}(B) = C$

ssi $t_{\vec{u}}(K) = C$

ssi $\vec{u} = \vec{KC}$.

donc $\varphi = t_{\vec{KC}} \circ S_{(IJ)} = S_{(IJ)} \circ t_{\vec{KC}}$.

5) Soit $\Omega = (BK) \cap (IJ)$.

On pose $h = S_\Omega \circ \varphi$.

a) On a $I = B * C$, $J = A * B$ $\Big\}$ $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \vec{KC}$

Donc $\varphi(J) = t_{\vec{KC}} \circ S_{(IJ)}(J)$
$= t_{\vec{KC}}(J)$
$= I$

* On a h est la composée d'un antidéplacement et d'un déplacement.

Donc h est un antidéplacement.

d'où on a $h(J) = S_\Omega \circ \varphi(J)$
$= S_\Omega(I)$; $\Omega = I * J$.
$= J$

donc h la symétrie axiale.

b) Comme $(BK) \perp (IJ)$ et $\Omega = I * J = B * K$.
($IBJK$ losange).

alors $S_\Omega = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)}$.

On a $h = S_\Omega \circ \varphi$
$= S_{(BK)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(IJ)} \circ t_{\vec{KC}}$
$= S_{(BK)} \circ t_{\vec{KC}}$.
$= S_{(BK)} \circ t_{\vec{JI}}$.

c) Soit $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{IJ}}(BK)$

On a $h = S_{(BK)} \circ t_{\vec{JI}}$
$= S_{(BK)} \circ S_{(BK)} \circ S_{\Delta'}$
$= S_{\Delta'}$.

avec Δ' la parallèle à (BK) passant par J.

Ex 2

1) a) * $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty$.

* $\lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{f(x)}{x + \frac{\pi}{2}} = f'_d(-\frac{\pi}{2}) = 1$.

b) f strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$
donc elle réalise une bijection de
$I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ vers $f(I) = [0, +\infty[= J$

Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow I$
$x \longmapsto f^{-1}(x) = g(x)$.

c) Comme f est dérivable sur I
et pour $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.
donc g dérivable sur $\mathbb{R}^+ = J$