Exercice n°1 : (6 points) On a représenté ci-dessous les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement de deux fonctions f et g.

$\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ et une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

$\mathscr{C}_g$ admet quatre asymptotes d'équations respectives : $y = -1$, $x = 1$, $x = 0$ et $y = x + 3$.

1°/ Déterminer l'image de l'intervalle $]-2,1]$ par la fonction f.

2°/ Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - x^2$; $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{gof(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(\sqrt{4x^2-1} - 2x\right)$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)+1}{\sin(\pi x)}$

3°/ Déterminer l'ensemble de définition de fof .

4°/ Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

a) Déterminer l'ensemble de définition de h

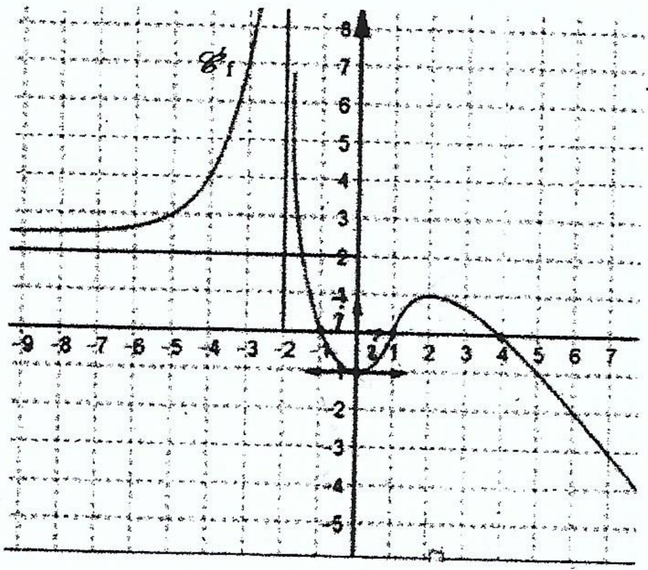
b) **Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse**

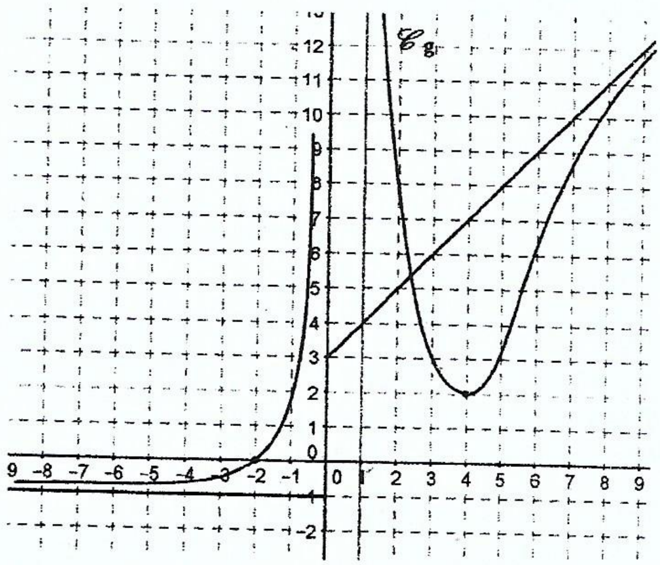
- C_h admet trois asymptotes verticales
- C_h admet une asymptote oblique
- fof est croissante sur [0, 2]

5°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet dans [1, 2] une solution unique α_n.

b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante. En déduire que (α_n) est convergente et donner sa limite.





Exercice n°2: (7 points)

1°/ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=1+\frac{8}{x+1}$. Etudier les variations de la fonction f.

2°/ Soit la suite u définie sur IN par $\begin{cases} u_0=7 \\ u_{n+1}=f(u_n), \quad \forall n\in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $2\leq u_n \leq 7$

3°/a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $|u_{n+1}-3|\leq\frac{2}{3}|u_n-3|$

b) En déduire que pour tout n de IN, on a : $|u_n-3|\leq 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4°/ On pose $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer par recurrence que la suite v est décroissante. Montrer alors que w est croissante.

b) En déduire que les suites v et w sont convergentes.

5°/ On désigne par ℓ et ℓ' les limites respectives de v et w

a) Vérifier que $\ell'=1+\frac{8}{\ell+1}$ et $\ell=1+\frac{8}{\ell'+1}$.

b) En déduire que $\ell=\ell'=3$ puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

6°/ Soit $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(u_k-3)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $w_n\leq 3\leq v_n$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $S_n\geq 0$ et que (S_n) est croissante

c) Montrer que $|S_n|\leq 12$. En déduire que (S_n) est convergente

Exercice n°3: (4 points) Soit P le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$;

On désigne par A, B et C les points d'abscisses respectives i, 2i et $-1+i$

1°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-2(i+\cos\theta)z+2i\cos\theta=0$

b) Ecrire sous forme exponentielle : $\cos\theta+i(1+\sin\theta)$ où $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2°/ Soit les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $e^{i\theta}+i$ et $e^{-i\theta}+i$

a) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

b) Determiner θ pour que CM_1M_2 soit équilatéral

Exercice n°4: (3 points) Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et l'équation (E): $(z^2-2i)^n-(z+1+i)^{2n}=0$

1°/ Vérifier que -1-i est solution de **(E)**

2°/ Soit P le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, A, A' et M les points d'affixes respectives $1+i$, $-1-i$ et z . Montrer que si z est solution de (E) alors MA'(MA-MA')=0.
En déduire que si en plus $z\neq-1-i$ alors M appartient à une droite que l'on précisera.

3°/

a) Soit $\theta\in]0,2\pi[$. Montrer que $\frac{z-(1+i)}{z+(1+i)}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=(-1+i)\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b) Déterminer les racines nième de l'unité .

c) En déduire de ce qui précède les solutions de (E)